Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 4
Lösungsvorschlag

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010

Aufgabe 4.1 (Lösungsvorschlag)

a) Da die Grundmenge vorgegeben ist, muss nur noch die Wahrscheinlichkeit für Teilmengen von Ω angegeben werden. Man kann davon ausgehen, dass alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Es handelt sich also um einen Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum. Demnsch gilt für $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{37}.$$

b) Die zu definierende Zufallsvariable X soll den Wert 1 haben, falls eine rote Zahl gewählt wird, -1 für eine schwarze Zahl und $-\frac{1}{2}$ für die Null. Formal heißt das:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in \{1,3,5,7,9,12,14,16,18,19,21,23,25,27,30,32,34,36\} \\ -1, & \text{falls } \omega \in \{2,4,6,8,10,11,13,15,17,20,22,24,26,28,29,31,33,35\} \\ -\frac{1}{2}, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

c)

$$P(X < 0) = P(X = -1) + P(X = -\frac{1}{2}) = \frac{18}{37} + \frac{1}{37} = \frac{19}{37}$$

Aufgabe 4.2 (Lösungsvorschlag)

a) Da $P(A) \in [0,1]$ für $A \in \mathscr{A}$ nach Definition gilt, so ist auch $F(x) = P((-\infty, x]) \in [0,1]$ $(x \in \mathbb{R})$.

b) Wegen $(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2]$ für $x_1 \leq x_2$ gilt auch $F(x_1) = P\left((-\infty, x_1]\right) \leq P\left((-\infty, x_2]\right) = F(x_2)$.

c) Betrachte die monoton steigende reelle Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Dann gilt

$$(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2] \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, \infty).$$

Nach Aufgabe 3.2 a) (Stetigkeit von unten) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) = P((-\infty, \infty)) = 1.$$

Ist jetzt y_n eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, so ist

$$x_n = \sup_{m \geq m} y_n$$

monoton wachsend, mit $\lim_{n\to\infty} = \infty$ und $x_n \le y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$1 = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \le \lim_{n\to\infty} F(y_n) \overset{a)}{\le} 1.$$

Analog folgt mit der Stetigkeit von oben für eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = P(\emptyset) = 0.$$

Für eine beliebige Folge y_n mit $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ ist

$$x_n = \sup_{m\ge n} y_m$$

monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ und $x_n \le y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$0 = \lim_{n\to\infty} F(x_n) \ge \lim_{n\to\infty} F(y_n) \overset{a)}{\ge} 0.$$

d) Sei $(x_n)_n$ nun eine beliebige monoton fallende reelle Folge mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, dann gilt mit Aufgabe 3.2 b) (Stetigkeit von oben) und $A_n = (-\infty, x_n]$ die Behauptung, da

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} P((-\infty, x_n]) \\
&= P((-\infty, x]) \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 (Lösungsvorschlag)

a) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum. Wegen $(X(\omega))^2 \ge 0$ für alle $\omega \in \Omega$, gilt

$$F(t) = P\{X^2 \le t\} = 0 \qquad \text{falls } t < 0.$$

Sei $t \in [0,4]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
F(t) &= P\{X^2 \le t\} \overset{(*)}{=} P\{X \le \sqrt{t}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{\sqrt{t}} f(x)dx \\
&\overset{t\in[0,4]}{=} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2}dx = \frac{\sqrt{t}}{2}.
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ ging $t \ge 0$ ein und es wurde verwendet, dass für alle $0 \le a \le b$ gilt

$$a \le b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} \le \sqrt{b}.$$

Im Falle $t > 4$ erhalten wir

$$F(t) = P\{X^2 \le t\} = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{\sqrt{4}} f(x)dx + \int_{\sqrt{4}}^{\infty} 0dx = 1.$$

Insgesamt folgt für die Verteilungsfunktion F von $Y = X^2$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } t \le 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{t} & , \text{ falls } 0 < t < 4 \\ 1 & , \text{ falls } t \ge 4 \end{cases}$$

b) Die Dichte g von Y ist auf dem offenen Intervall $(0,4)$ fast sicher (d.h. bis auf eine Menge vom Maß 0) gerade die Ableitung der zuvor berechnete Verteilungsfunktion und kann ansonsten auf den Wert 0 gesetzt werden. D.h.

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0 \text{ oder } t \geq 4 \\ \frac{1}{4\sqrt{t}}, & \text{falls } 0 < t < 4 \end{cases}$$

Man beachte, dass dies nur eine von vielem Möglichkeiten ist, eine Dichte zur angegebenen Verteilungsfunktion zu wählen.

c) Mit der Verteilungsfunktion aus Aufgabenteil (a) folgt:

$$\begin{aligned} P\{Y \in (1,2]\} &= P(\{Y \leq 2\} \setminus \{Y \leq 1\}) \\ &\overset{\{Y\leq 1\}\subseteq\{Y\leq 2\}}{=} P\{Y \leq 2\} - P\{Y \leq 1\} = F(2) - F(1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0.2071. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.4 (Lösungsvorschlag)

a) Für $x < 0$ ist $F(x) = 0$. Falls $0 \leq x \leq 1$ erhalten wir

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{5} \cdot t\,dt = \frac{1}{10} \cdot x^2.$$

Für den Fall $x > 1$ erhält man entsprechend

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{1}{10} - \frac{9}{10x}.$$

Insgesamt ergibt dies:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x < 0 \\ \frac{1}{10}x^2 & \text{, falls } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{10} - \frac{9}{10\cdot x} & \text{, falls } 1 < x \end{cases}$$

b) In der Skizze sieht man, dass aus $F(VaR) = 0,05$ folgt, dass $0 \leq VaR \leq 1$.

Somit

$$\begin{aligned} F(VaR) &= \frac{VaR^2}{10} \overset{!}{=} 0,05 \\ &\Rightarrow VaR^2 = 0,5 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also $VaR = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Es gilt

$$P[X \leq VaR] = \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{u}{5} du = \left.\frac{u^2}{10}\right|_{u=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1/2}{10} = \frac{1}{20} \mathrel{\widehat{=}} 5\%$$

$$\Rightarrow P[X > VaR] = 1 - P(X \leq VaR) = \frac{15}{20} \mathrel{\widehat{=}} 95\%.$$

Anschaulich ist VaR somit der Wert, der mit 95 % Wahrscheinlichkeit überschritten wird.

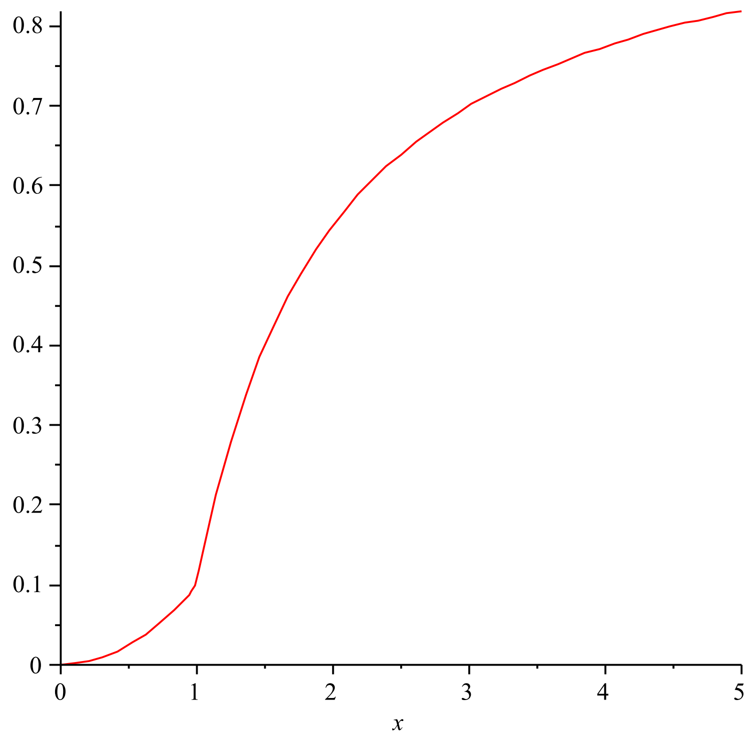

Abbildung 1: Abbildung zur Lösung von Aufgabe 26 a).