Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 7

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
11. August 2010

Aufgabe 7.1 — 4 Punkte

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine S–Bahn Verspätung hat, betrage 0.30. Sofern die S–Bahn Verspätung hat, kommt Student S. nur mit Wahrscheinlichkeit 0.2 pünktlich zur Vorlesung. Sofern die S–Bahn aber keine Verspätung hat, kommt er mit Wahrscheinlichkeit 0.99 pünktlich zur Vorlesung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Student S. pünktlich zur Vorlesung kommt?

b) Eine Klausur wird von einem gut vorbereiteten Studenten mit Wahrscheinlichkeit 0.99, von einem nicht gut vorbereiteten Studenten aber nur mit Wahrscheinlichkeit 0.1 bestanden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student gut vorbereitet ist, sei 0.8. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Student, der die Klausur nicht bestanden hat, gut vorbereitet war?

Lösung
a) Wir wissen laut Aufgabentext mit
A :="S. kommt pünktlich zur Vorlesung",
B :="S-Bahn hat Verspätung",
dass
$P(B) = 0.3$, $P(A|B) = 0.2$, $P(A|B^c) = 0.99$
gilt und wir wollen $P(A)$ berechnen.
Dann gilt mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) \cdot P(A|B) + P(B^c) \cdot P(A|B^c) \\ &= 0.3 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.99 \\ &= 0.753. \end{aligned}$$

b) Definiere die Ereignisse
A :="Student vorbereitet.",
B :="Student besteht Klausur.",
und gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten
$P(B|A) = 0.99$, $P(B|A^c) = 0.1$, $P(A) = 0.8$.
Gesucht ist $P(A|B^c)$. Mit der Formel von Bayes gilt dann

$$\begin{aligned} P(A|B^c) &= \frac{P(B^c|A) \cdot P(A)}{P(B^c|A) \cdot P(A) + P(B^c|A^c) \cdot P(A^c)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.8}{0.01 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.2} \\ &\approx 0.043. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2 — 4 Punkte

a) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein W–Raum und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ mit

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Zeigen Sie:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Hinweis: Formen Sie die rechte Seite mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit um.

b) Student S. hat das Passwort für seinen Rechnerzugang vergessen. Er erinnert sich gerade noch, dass es aus genau 8 Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ besteht. Er versucht nun, durch zufällige Eingabe 8–stelliger Zahlen das Passwort zu erraten. Da er sich alle bereits eingegebenen Zahlen notiert, tippt er keine Zahl doppelt ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der n–ten Eingabe einer 8–stelligen Zahl das Passwort findet ($n \in \mathbb{N}$ fest).
Hinweis: Gefragt ist nach

$$P(B_1^c \cap \cdots \cap B_{n-1}^c \cap B_n),$$

wobei B_i das Ereignis ist, dass der Student bei der i–ten Eingabe das richtige Passwort eintippt.

Lösung

a) $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ W-Raum, $A_n, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ mit $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

Zu zeigen:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_2 \cap A_1)) \cdot \ldots \cdot P(A_n|(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})) \\
&= P(A_1) \cdot \tfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot \tfrac{P(A_3 \cap (A_2 \cap A_1))}{P(A_2 \cap A_1)} \cdot \ldots \cdot \tfrac{P(A_n \cap (A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}))}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})} \\
&= P(A_1 \cap \ldots \cap A_n).
\end{aligned}$$

b) $B_i \widehat{=}$ richtiges Passwort bei i-ter Eingabe.

Gesucht:

$$P(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n)$$

Es gilt nach a)

$$P(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n) = P(B_1^c) \cdot P(B_2^c|B_1^c) \cdot \ldots \cdot P(B_n|(B_n^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c)$$

und es gilt wegen dem Aufschrieb aller schon bekannten Passwörter

$$\begin{aligned}
&P(B_1^c) = \tfrac{10^8-1}{10^8} \\
&P(B_2^c|B_1^c) = \tfrac{10^8-2}{10^8-1} \\
&\quad\vdots \\
&P(B_{n-1}^c|(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-2}^c)) = \tfrac{10^8-(n-1)}{10^8-(n-2)}.
\end{aligned}$$

somit folgt für $n \leq 10^8$:

$$\begin{aligned}
P(B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n) &= \tfrac{10^8-1}{10^8} \cdot \tfrac{10^8-2}{10^8-1} \cdot \ldots \cdot \tfrac{10^8-(n-1)}{10^8-(n-2)} \cdot \tfrac{1}{10^8-(n-1)} \\
&= \underline{\underline{\tfrac{1}{10^8}}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.3 — 4 Punkte

Die Zuverlässigkeit einer Tuberkulose (Tbc)-Röntgenuntersuchung sei durch folgende Angaben gekennzeichnet:

- 90 % der Tbc-kranken Personen werden durch Röntgen entdeckt
- 99 % der Tbc-freien Personen werden als solche erkannt.

Aus einer großen Bevölkerung, von der 0.1% Tbc-krank sind, wird nun eine zufällig herausgegriffene Person geröntgt un als Tbc-verdächtig eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person wirklich Tbc-krank ist?

Loesung Wir definieren die Ereignisse
A: Patient ist krank
B: Patient wird als krank erkannt.

Dann gilt

$$P(A) = 0.001, \qquad P(B|A) = 0.9$$

und somit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = 0,083.$$

Aufgabe 7.4 — 4 Punkte

Ein zufällig ausgewählter Hörer einer bestimmten Vorlesung besteht die Semestralklausur mit Wahrscheinlichkeit 0.7. Fällt er durch die Klausur, dann nimmt er an einer mündlichen Nachprüfung teil. Die Gesamtprüfung gilt als bestanden, wenn die Klausur oder die Nachprüfung bestanden wird.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein in der Klausur durchgefallener Student dem Prüfer A bzw. B bzw. C zugeteilt wird, beträgt erfahrungsgemäß 0.5 bzw. 0.4 bzw. 0.1. Die Wahrscheinlichkeit, bei Prüfer A bzw. B bzw. C die mündliche Nachprüfung zu bestehen, beträgt erfahrungsgemäß 0.6 bzw. 0.1 bzw. 0.9.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Student die Gesamtprüfung besteht, falls er zu jenen gehört, die die Klausur nicht bestanden haben.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Student die Gesamtprüfung besteht.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Student in der Klausur durchgefallen ist, falls er die Gesamtprüfung bestanden hat.

Lösung
(a) $P(\text{bestanden}|\text{Klausur durchgefallen}) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9 = 0.43$
(b) $P(\text{bestanden}) = 0.7 + 0.3 \cdot 0.43 = 0.829$
(c)

$$\begin{aligned} &P(\text{Klausur durchgefallen}|\text{bestanden}) \\ &= \frac{P(\text{bestanden}|\text{Klausur durchgefallen}) \cdot P(\text{Klausur durchgefallen})}{P(\text{bestanden})} \\ &= \frac{0.43 \cdot 0.3}{0.829} \approx 0.156 \end{aligned}$$

Abgabetermin: Freitag, 04. Juni 2010 vor der Vorlesung.