Einführung in die Stochastik
Übungsblatt 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Schlicht
Dr. Mehdi Slassi
Dipl. Math. Andreas Fromkorth

Sommersemester 2010
14. Mai 2010

Aufgabe 5.1 — 4 Punkte

Bestimmen Sie den Erwartungswert einer $B_{n,p}$-binomialverteilten Zufallsvariablen X und einer P_λ-Poison-verteilten Zufallsvariablen Y. **Lösung**
Für $k > 0$ gilt

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Da X eine diskrete Zufallsvariable mit Zähldichte

$$p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{, falls } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

ist, gilt nach Vorlesung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= = np(p + (1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariabel Y hat die Zähldichte

$$p_k = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) & \text{, falls } 0 \le k \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \\ &= \exp(-\lambda)\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 — 4 Punkte

An einem Flughafen wird für das Abstellen eines Autos für x Minuten die Gebühr

$$h(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 \le x \le 60 \\ \frac{x}{6} & \text{für } 60 < x < 600 \\ 800 & \text{für } x \ge 600 \end{cases}$$

verlangt. (Im Falle $x \geq 600$ wird das Auto abgeschleppt.)

Student S. holt seine Oma vom Flughafen ab. Dazu fährt er exakt zur geplanten Ankunftszeit des Flugzeugs in den Parkplatz ein. Leider hat das Flugzeug X Minuten Verspätung, wobei X eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist. Dabei erreicht er die Parkaufsicht, bei der er die Gebühr bezahlen muss, erst wieder nach $X + 30$ Minuten. Wie groß ist im Mittel die Gebühr, die Student S. bezahlen muss?

Hinweis: Berechnet werden soll

$$\mathbf{E}(h(X+30))$$

wobei X eine $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable ist.

Lösung

Es gilt

$$h(x+30) = \begin{cases} 10 & \text{, falls } -30 \leq x \leq 30 \\ \frac{x+30}{6}, \text{ falls } 30 < x < 570 \\ 800, \text{ falls } x > 570 \end{cases}$$

Da X exponentialverteilt mit Parameter λ ist (also stetig verteilt), gilt nach der Vorlesung

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(h(X+30)\right) &= \int h(x+30) \cdot f(x) dx \\
&= \int_0^\infty h(x+30)\lambda \exp(-\lambda x) dx \\
&= \int_0^{30} 10\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{30}^{570} \frac{x+30}{6} \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{570}^{\infty} 800\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= 10 - e^{-30\lambda} + \frac{1}{6} \cdot \frac{60e^{-30\lambda} + e^{-30\lambda} - 600e^{-570\lambda} - e^{-570\lambda}}{\lambda} \\
&\quad + \lim_{c\to\infty} 800 \cdot (-e{-}\lambda c + e^{-570\lambda}) \\
&= 10 + \frac{1}{6\lambda} \cdot e^{-30\lambda} - 100 \cdot e^{-570\lambda} - \frac{1}{6\lambda} \cdot e^{-570\lambda} + 800 \cdot e^{-570\lambda}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.3 — 4 Punkte

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 6 \cdot x \cdot (1-x) & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

sei Dichte einer Zufallsvariablen Y. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y. Die varianz von Y ist definiert als

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right).$$

Lösung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}Y &= \int x\cdot f(x)dx = \int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx \\
&= \int_0^1 6x^2dx - \int_0^1 6x^3dx = 2x^3\Big|_{x=0}^1 - \frac{3}{2}x^4\Big|_{x=0}^1 \\
&= 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \\
\mathbf{E}(Y^2) &= \int x^2\cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)dx \\
&= \int_0^1 6x^3dx - \int_0^1 6x^4dx = \frac{3}{2}x^4\Big|_{x=0}^1 - \frac{6}{5}x^5\Big|_{x=0}^1 \\
&= \frac{3}{2}-\frac{5}{6}=\frac{3}{10} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \mathbf{E}\left((Y-\mathbf{E}Y)^2\right) = \mathbf{E}\left(Y^2-2Y\mathbf{E}Y+(\mathbf{E}Y)^2\right) \\
&= \mathbf{E}\left(Y^2\right)-2(\mathbf{E}Y)^2+(\mathbf{E}Y)^2 = \mathbf{E}\left(Y^2\right)-(\mathbf{E}Y)^2 = \frac{3}{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10}-\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.4 — 4 Punkte

Es sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = a + b\cdot\arctan(x) \qquad -\infty < x < \infty.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a und b.

(b) Wie lautet die Dichtefunktion von X?

Lösung (a) Wegen

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{x\to-\infty}(a+b\cdot\arctan(x)) = a-b\frac{\pi}{2} \overset{!}{=} 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty}(a+b\cdot\arctan(x)) = a+b\frac{\pi}{2} \overset{!}{=} 1$$

folgt

$$a=\frac{1}{2}, \qquad b=\frac{1}{\pi}.$$

(b) Es gilt

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$