Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann/J. Plehnert
6.5.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Übung zu CMC Surfaces

Aufgabe 8 – Wiederholung Grundstudium (nur Präsenzübung):

Berechnen Sie $\cos 2t$ und $\sin 2t$.

Aufgabe 9 – Geometrische Vorstellung (nur Präsenzübung):

a) Wie schneidet das Einheits-Katenoid horizontale Ebenen, vertikale Ursprungsebenen, eine Sphäre vom Radius r (mit Mittelpunkt im Ursprung)?

b) Wie schneidet ein Helikoid horizontale Ebenen, vertikale Ursprungsebenen, eine Sphäre vom Radius r (mit Mittelpunkt im Ursprung)?

c) Wie schneidet die xy-Ebene die Enneper-Fläche?

Aufgabe 10 – Enneper-Fläche:

Rechnen Sie nach, dass die Fläche minimal ist.

Aufgabe 11 – Skalierte Katenoide:

Wir betrachten ein Katenoid mit vertikaler Achse,

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t,\varphi) := \big(\cosh t\cos\varphi,\, \cosh t\sin\varphi,\, t\big),$$

das symmetrisch zur horizontalen xy-Ebene liegt. Die zugehörigen Skalierungen seien $f_\lambda(t,\varphi) := \lambda f(t,\varphi)$, für $\lambda > 0$, ihre Bildmenge sei $M_\lambda := f_\lambda\big(\mathbb{R}, [0, 2\pi)\big) \subset \mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie einen offenen Kegel $K \subset \mathbb{R}^3$ um die z-Achse mit Spitze im Ursprung, der maximal bezüglich folgender Eigenschaft gewählt ist: Für alle $\lambda > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt $f_\lambda(x, y) \notin K$. Was ist der Öffnungswinkel α von K?

b) Geben Sie $d_{\max} > 0$ an, so dass ein koaxiales Paar von Einheitskreisen im Abstand $d > d_{\max}$ keine zusammenhängende Teilmenge eines Katenoids berandet, aber für den Abstand $d = d_{\max}$ gerade die zusammenhängende Teilmenge eines Katenoids M_λ berandet. Drücken Sie $d_{\max}$ durch α aus.

c) Besitzen die Katenoide M_λ einen Grenzwert für $\lambda \to \infty$, d.h. kann eine Folge von Punkten $\lambda f(t_\lambda, \varphi_\lambda)$ konvergieren?

d) Es sei g_x die vertikale Gerade $g_x := \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie: Der Schnittpunkt $(x, 0, z)$ der oberen Katenoidhälfte $f_\lambda\big([0,\infty), 0\big)$ mit der Geraden g_x definiert für $0 < \lambda \le x$ eine eindeutige Lösung $z = z(\lambda, x) \ge 0$.

e) Die Funktion $\lambda \mapsto z(\lambda, x)$ läßt sich in 0 stetig ergänzen durch $\lim_{\lambda\to 0} z(\lambda, x) = 0$.

f) Zwei koaxiale Einheitskreise im Abstand $d < d_{\max}$ beranden eine zusammenhängende Teilmenge eines Katenoids M_λ für genau zwei verschiedene Werte von λ.

g) Benutzen Sie Teil e), um den Grenzwert von M_λ für $\lambda \to 0$ zu diskutieren. Bestimmen Sie dazu eine (maximale) Teilmenge M des $\mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $p \in M$ gibt es eine Folge $p_\lambda \in M_\lambda$, so dass $\lim_{\lambda\to 0} p_\lambda = p$.

h) Betrachten Sie die Konvergenz des letzten Aufgabenteils. Konvergieren auch die zugehörigen Normalen? (Man spricht dann von *C^1-Konvergenz.*) *Tip:* Was ist die Normale in den Schnittpunkten von g_x mit M_λ?