4 Der Residuensatz

Der Residuensatz ist die Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf Funktionen mit isolierten Singularitäten und besitzt als solcher zahlreiche Anwendungen in der gesamten Analysis. Im Beweis führen wir seine Aussage via der Laurentdarstellung auf den Cauchyschen Integralsatz zurück.
Genauer gesagt, sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion, welche in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ in ihre Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ entwickelt sei, wobei r so gewählt ist, dass f höchstens in z_0 eine isolierte Singularität besitzt.
Wir beginnen mit der für diesen Abschnitt zentralen Definition des Residiums.

4.1 Definition. In der obigen Situation heißt $\mathrm{Res}_f(z_0) := a_{-1}$ das *Residuum von f in z_0*.

4.2 Bemerkung. Nach Theorem 1.2 gilt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varrho} f(z)dz, \qquad 0 < \varrho < r.$$

Wir erläurern unsere Definition anhand der folgenden Beispiele.

4.3 Beispiele.
a) Ist $\omega_f(z_0) \geq -1$, so gilt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Es gilt nämlich $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$ für eine holomorphe Funktion g und somit ist $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$. Insbesondere besitzt

i) die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ in z_0 das Residuum 1,

ii) und $z \mapsto \frac{1}{z(z-i)^2}$ in 0 das Residuum -1.

b) Gilt $\omega_f(z_0) \geq 0$, so folgt $\mathrm{Res}_f(z_0) = 0$.
c) Eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(U)$ heißt *Nichtnullteiler* in $\mathcal{M}(U)$, falls für alle $g \in \mathcal{M}(U)$ mit $g \not\equiv 0$ gilt: $fg \neq 0$. Für eine solche Funktion und $z_0 \in U$ gilt

$$\mathrm{Res}_{f'/f} z_0 = \omega_f(z_0).$$

Beweis als Übungsaufgabe!
d) Ist $z_0 \in U$ ein einfacher Pol von $f : U \to \mathbb{C}$ und ist g holomorph in z_0, so gilt

$$\mathrm{Res}_{fg}(z_0) = g(z_0)\mathrm{Res}_f(z_0).$$

e) Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer einfachen Nullstelle in $z_0 \in U$ und ist g in z_0 holomorph mit $g(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\mathrm{Res}_{g/f}(z_0) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

f) Besitzt $f : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt für g definiert durch $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

Wie empfehlen den Beweis der Aussagen d)e) und f) als Übungsaufgaben durchzuführen.

Das folgende Theorem ist das Hauptergebnis dieses Abschnitts.

4.4 Theorem. (Residuensatz).
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $S \subset M$ diskret und $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ist γ ein nullhomologer Zyklus in U mit $\mathrm{spur}(\gamma) \cap S = \emptyset$, *so gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{\omega \in S} \mathrm{Ind}(\gamma, \omega) \mathrm{Res}_f(\omega).$$

Es ist interessant zu bemerken, dass die obige Summe endlich ist, da $\mathrm{Ind}(\gamma, \omega) \neq 0$ nur für endlich viele Singularitäten von f gilt.

Beweis. Es seien $z_1, \ldots, z_m$ die isolierten Singularitäten von f mit $\mathrm{Ind}(\gamma, z_i) \neq 0$. Die Laurentreihe von f um z_i lautet

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_i)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_i)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_i)^n.$$

Bezeichnet man den ersten Summanden auf der rechten Seiten mit $h_i(z)$, so ist h_i holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{z_i\}$ und somit ist $f - \sum_{i=1}^m h_i$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus S$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{i=1}^m \int_\gamma h_i(z)dz = \sum_{i=1}^m \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,i}(z - z_i)^n dz \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_\gamma a_{n,i}(z - z_i)^n dz = \sum_{i=1}^m a_{-1,i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_i} dz \\
&= \sum_{i=1}^m \mathrm{Res}_f(z_i) \mathrm{Ind}(\gamma, z_i) 2\pi i.
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden wollen wir anhand von Beispielen aufzeigen, wie der Residuensatz zur Bestimmung von *reellen Integralen* verwendet werden kann. Das Grundprinzip besteht darin, das reelle Integrationsintervall in Beziehung zu einem geschlossenen Integrationsweg in $\mathbb{C}$ zu setzen, für den sich dann das Integral vermöge des Residuensatzes auswerten lässt.

4.5 Beispiele.
Beispiel 1.
Wir bestimmen den Wert des Integrals

$$\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos t}dt$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Zunächst gilt

$$I := \int_0^\pi \frac{1}{2+\cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})}dt.$$

Wählt man den Weg $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$, so gilt nach Definition des Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4z+1}dz \\ &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}dz \quad \text{mit} \quad z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

. Der Residuensatz impliziert, dass

$$I = 2\pi i \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{2} \operatorname{Ind}(\gamma, z_j)\operatorname{Res}_f(z_j)$$

gilt. Da $\operatorname{Ind}(\gamma, z_2) = 0$ und $\operatorname{Ind}(\gamma, z_1) = 1$ ist, folgt

$$I = 2\pi \operatorname{Res}_f(z_1)$$

mit $f(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$. Nach Beispiel 4.3a) gilt

$$\operatorname{Res}_f(z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)) = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

und somit gilt

$$\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos t}dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Beispiel 2.
Die soben angewandte Methode läßt sich ohne Probleme auf Integrale der Form

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt \quad \text{ mit } R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

für Polynome P und Q mit $Q \neq 0$ verallgemeinern. Setzt man wie oben $\gamma(t) = e^{it}$ und berücksichtigt die Identitäten $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ bzw. $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, so gilt

$$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z} R\big(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\big) dz = 2\pi \sum_{|\omega|<1} \mathrm{Res}_h(\omega),$$

mit $h(z) = \frac{1}{z}R\big(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\big)$.

Beispiel 3.
Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion derart, dass auf $\mathbb{R}$ keine Pole von R liegen und dass grad $Q \geq$ grad $P + 2$ gilt. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Res}_R(z) 2\pi i.$$

Um diese Aussage herzuleiten, betrachten wir den Weg $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = re^{it}$.

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{[-r,r]} R(z)dz + \int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Res}_R(z).$$

Nach Voraussetzung gilt $|R(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ für $|z|$ groß genug, welches bedeutet, dass

$$|\int_{\gamma_r} R(z)dz| \leq \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Daher folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{Res}_R(z).$$

Beispiel 4.
Betrachtet man speziell die rationale Funktion R gegeben durch $R(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Die Funktion R erfüllt die Voraussetzungen von Beispiel 3; genauer gesagt sind $z_1 = e^{i\pi/4}, z_2 = e^{3i\pi/4}, z_3 = e^{5i\pi/4}, z_4 = e^{7i\pi/4}$ die Pole von R.

Diese sind alle von erster Ordnung und z_1 sowie z_2 liegen in der oberen Halbebene. Wir berechnen die zugehörigen Residuen zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_R(z_1) &= \lim_{z\to z_1} (z-z_1) \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\
\mathrm{Res}_R(z_2) &= \lim_{z\to z_2} (z-z_2) \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{z_2^2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)},
\end{aligned}$$

und verifizieren, dass $\mathrm{Res}_R(z_1) + \mathrm{Res}_R(z_2) = \frac{1}{2\sqrt{2}i}$ gilt. Daher gilt nach Beispiel 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Beispiel 5.
In analoger Weise zeigen wir, dass

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+i}}{1+x^2} dx = \pi(1+i)$$

gilt. Betrachtet man in diesem Fall die Funktion R gegeben durch $R(z) = \frac{\sqrt{z+i}}{1+z^2}$, so gilt

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}_R(i) = 2\pi i \lim_{z\to i} (z-i) \frac{\sqrt{z+i}}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \frac{\sqrt{2i}}{2i} = \pi(1+i).$$

Beispiel 6.
In diesem Beispiel berechnen wir Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2} dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2} dx$$

für $a > 0$ mit Hilfe des Residuensatzes. Offenbar besitzt die Funktion R gegeben durch $R(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ die beiden einfachen Pole $\pm ia$. Wir wählen als Weg γ den in der Skizze angegebenen Weg,

d.h. für $t \in [0,1]$ sowie $r > 0$ und $s > a$ setzen wir

$$\gamma_1(t) := r + ist,\ \gamma_2(t) := is + r(1-2t),\ \gamma_3(t) := -r + is(1-t),\ \gamma_4(t) := -r + 2tr.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} R(z)e^{iz}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{Re^{i\cdot}}(ia),$$

mit $R(z) = \frac{1}{a^2+z^2}$. Wir betrachten zunächst das Integral bezüglich γ_1. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\gamma_1} R(z)e^{iz}dz\Big| &= \Big|\int_0^1 R(r+ist)e^{ir-st}isdt\Big| \leq \int_0^1 |R(r+ist)e^{-st}s|dt \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} |R(r+ist)| \int_0^1 e^{-st}dts \leq \frac{1}{r^2}(e^{-s}-1) \\ &\leq \frac{C}{r^2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Analog zeigen wir

$$\Big|\int_{\gamma_3} R(z)e^{iz}dz\Big| \leq \frac{C}{r^2}$$

und erhalten ferner

$$\Big|\int_{\gamma_2} R(z)e^{iz}dz\Big| \leq \int_0^1 \big|R(is+r(1-2t))\big|e^{-s}2rdt \leq 2r\frac{e^{-s}}{s}.$$

Wählen wir speziell $s = r$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_2} R(z)e^{iz}dz = 0.$$

Wir bestimmen schließlich das Residium von $R(\cdot)e^{i\cdot}$ in ia via

$$\mathrm{Res}_{Re^{i\cdot}}(ia) = \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{e^{iz}}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{e^{-a}}{2ia}.$$

Betrachten wir den Spezialfall $a = 1$, so gilt zusammenfassend

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2ie} = \frac{\pi}{e},$$

und daher auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Beispiel 7.
Zuletzt betrachten wir Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx,$$

wobei $\alpha \in (0,1)$ und $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion mit $\operatorname{grad}(Q) \geq \operatorname{grad}(P) + 2$ sei und R keine Pole in $(0,\infty)$, aber einen Pol erster Ordnung in 0 habe. Ein konkretes Beispiel ist $R(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. Der zur Berechnung solcher Integrale typischer Weise verwandte Weg ist ein sogenannter *Schlüssellochweg* γ.

Der Weg γ setzt sich also zusammen aus γ_1 auf der Geraden $\operatorname{Im} z = \varepsilon$, einem positiv durchlaufenden Kreisbogen γ_2 um 0 mit Radius r, dem Weg γ_3 auf der Geraden $\operatorname{Im} z = -\varepsilon$ und einem negativ zu durchlaufenden Kreisbogen γ_4 um 0 mit Radius ϱ. Wir können r so groß und ε bzw. ϱ so klein wählen, dass alle Pole von R mit Ausnahme der 0 im Inneren von $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ liegen. In $G := \mathbb{C} \backslash [0,\infty)$ werde der Zweig der Potenzfunktion z^{α} mit $\arg z \in (0, 2\pi)$ gewählt.
Setzt man $h(z) = R(z) z^{\alpha}$, so gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in G} \operatorname{Res}_h(z).$$

Wir beginnen mit dem Integral bezüglich γ_2 und sehen, dass $\left| \int_{\gamma_2} h(z) dz \right| \leq 2\pi r \frac{C}{r^2} r^{\alpha} \leq C r^{\alpha - 1}$ gilt. Daher gilt

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_2} z^{\alpha} R^{\alpha}(z) dz = 0.$$

Weiter gilt $\left|\int_{\gamma_4} h(z)dz\right| \leq 2\pi\varrho\frac{C}{\varrho}\varrho^\alpha \leq \frac{C}{\varrho^\alpha}$, und somit

$$\lim_{\varrho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_4} h(z)dz = 0.$$

Ferner, da

$$\lim_{y\to 0, y>0}(x-iy)^\alpha = x^\alpha e^{2\pi i\alpha}$$

ist, gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1} h(z)dz = \int_\varrho^r x^\alpha R(x)dx \quad \text{sowie} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_3} h(z)dz = -e^{2\pi i\alpha}\int_\varrho^r x^\alpha R(x)dx.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_\gamma h(z)dz \overset{r\to\infty,\varrho\to 0,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (1-e^{2\pi i\alpha})\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx.$$

und somit

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = \frac{1}{1-e^{2\pi i\alpha}}2\pi i\sum_{z\neq 0}\mathrm{Res}_h(z), \qquad h(z) = z^\alpha R(z).$$

Beispiel 8.
Betrachten wir speziell die Funktion R gegeben durch $R(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, so folgt

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},$$

da für das obige Integral mit $h(z) = R(z)z^\alpha$

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\mathrm{Res}_h(-1) = -\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}e^{i\pi\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

gilt.

4.6 Bemerkung. Es ist verlockend, den Wert des Gaußschen Integrals

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

mittels des Residuensatzes direkt zu bestimmen. Da die Funktion $z \mapsto e^{-z^2}$ jedoch auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, betrachten wir die Hilfsfunktion $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$g(z) := \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}} \quad \text{mit} \quad a = \frac{1+i}{\sqrt{\pi/2}}.$$

Wegen $a^2 = i\pi$ folgt

$$g(z) - g(z+a) = e^{-z^2}.$$

und g besitzt genau an den Stellen $-\frac{1}{2}a + na, n \in \mathbb{Z}$ einfache Pole. Definiert man den Weg γ wie in der folgenden Skizze,

so liegt nur der Punkt $a/2$ im Innern von γ. Weiter gilt

$$\mathrm{Res}_g(a/2) = \frac{e^{-a^2/4}}{-2ae^{-a^2}} = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}}.$$

Die obige Relation für g impliziert mit dem Residuensatz daher

$$\int_{-r}^{s} e^{-x^2} dx + \int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_g(a/2) = \sqrt{\pi}.$$

Da die Integrale längs γ_1 und γ_2 für wachsendes s, r nach 0 konvergieren, folgt die Behauptung.

Die wohl wichtigste Konsequenz des Residuensatzes innerhalb der Funktionentheorie ist eine Anzahlformel für Null- und Polstellen meromorpher Funktionen. Im Folgenden zeigen wir zunächst, dass sich mittels des Residuensatzes die Anzahl der Nullstellen durch ein Integral ausdrücken lässt. Wir führen dazu den Begriff der Vielfachheit einer Nullstelle ein.

4.7 Definition. Eine Funktion $f \in \mathcal{H}(U)$ hat in $z_0 \in U$ eine *Nullstelle der Vielfachheit* $k \in \mathbb{N}$, falls $\omega_f(z_0) = k$ gilt und somit

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq n \leq k-1 \quad \text{und } f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

ist. In diesem Fall nennnt man z_0 auch *k-fache Nullstelle* von f. Gilt $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt z_0 *Nullstelle der Ordnung* ∞.

Wir betrachten zunächst eine holomorphe Funktion f mit einer Nullstelle in $a \in \mathbb{C}$ der Vielfachheit $\nu < \infty$. Dann ist die Funktion $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ in der Nähe von a meromorph. Die Darstellung $f(z) = (z-a)^\nu g(z)$ mit einer in einer Umgebung von a holomorphen Funktion g, welche $g(a) \neq 0$ erfüllt, impliziert

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da g'/g in einer Umgebung von a holomorph ist, gilt $\mathrm{Res}_{f'/f}(a) = \nu$. Diese Überlegung lässt sich leicht auf meromorphe Funktionen verallgemeinern. Hat nämlich f in b einen Pol der Ordnung ν, so besitzt f'/f in b einen einfachen Pol mit Residium $-\nu$, da $f(z) = (z-b)^{-\nu}g(z)$ gilt.
Der Residuensatz impliziert nun folgendes Resultat.

4.8 Satz. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine meromorphe, nicht konstante Funktion. Bezeichnet man mit $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ die Null- bzw. Polstellen von f der Ordnung $\nu(a_j)$ bzw. $\nu(b_j)$, so gilt für jeden nullhomologen Zyklus γ in U mit* $\mathrm{spur}(\gamma) \cap \{a_1, a_2, \ldots\} = \emptyset$ *und* $\mathrm{spur}(\gamma) \cap \{b_1, b_2, \ldots\} = \emptyset$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j \mathrm{Ind}(\gamma, a_j)\nu(a_j) - \sum_j \mathrm{Ind}(\gamma, b_j)\nu(b_j).$$

Wir bemerken, dass die im obigen Satz auftretenden Summen endlich sind, da die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für welche $\mathrm{Ind}(\gamma, z) \neq 0$ gilt, relativ kompakt in U ist und daher nur endlich viele Null- bzw. Polstellen von f enthalten kann.

Der obige Satz impliziert als Folgerung die sogenannte Anzahlformel für Null- und Polstellen. Bezeichnen wir mit

$$N := \mathrm{Anz}_f(0, \mathrm{Int}(\gamma)) \quad \text{bzw.} \quad P := \mathrm{Anz}_f(\infty, \mathrm{Int}(\gamma)),$$

die mit Vielfachheit gezählte Anzahl der Null- bzw. Polstellen von f in $\mathrm{Int}(\gamma)$, so gilt das folgende Korollar. Ein geschlossener Weg γ heißt im Folgenden *einfach geschlossen*, falls $\mathrm{Int}(\gamma) \neq \emptyset$ und $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$ gilt. Speziell gilt für einfach geschlossene und in einer offenen Menge U nullhomologe Wege γ für $f \in \mathcal{H}(U)$ stets

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \quad z \in \mathrm{Int}(\gamma).$$

4.9 Korollar. (Anzahlformel für Null- und Polstellen).
Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funtkion mit nur endlich vielen Null- und Polstellen in U und γ ein einfach geschlossener und in U nullhomologer Weg, so dass f auf $\mathrm{spur}(\gamma)$ *null- und polstellenfrei ist. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P.$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer weiteren Konsequenz des Satzes 4.8, dem klassischen Satz von Rouché. Dieser ist nach dem französichen Mathematiker Eugène ROUCHÉ (1832-1910) benannt.

4.10 Satz. (Satz von Rouché).
Es seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und γ ein einfach geschlossener, in U nullhomologer Weg mit

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad \textit{für alle } z \in \mathrm{spur}(\gamma). \tag{4.1}$$

Dann haben f und g im Innern von γ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt), d.h. es gilt

$$\mathrm{Anz}_f(0, \mathrm{Int}(\gamma)) = \mathrm{Anz}_g(0, \mathrm{Int}(\gamma)).$$

Beweis. Wir nehmen oBdA an, dass f und g nur endlich viele Nullstelllen in U haben. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $V \subset U$ von $\mathrm{spur}(\gamma)$, so dass $h := f/g$ in V holomorph und

$$|h(z) - 1| < 1 \quad \text{für} \quad z \in V$$

gilt. Damit ist $\log h$ in V wohldefiniert und ist dort die Stammfunktion von h'/h. Wegen $h'/h = f'/f - g'/g$ und da f und g nach Voraussetzung auf $\mathrm{spur}(\gamma)$ nullstellenfrei sind, folgt

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Die Behauptung folgt daher aus Korollar 4.9.

□

4.11 Bemerkung. Die Aussage des Satzes von Rouché gilt bereits dann, wenn man anstelle der Bedingung 4.1 die schwächere Bedingung

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathrm{spur}(\gamma)$$

fordert.

4.12 Bemerkungen.
Der Satz von Rouché besitzt verschiedenste Anwendungen in der Mathematik.
a) Das Polynom $f(z) = z^n$ hat in $z = 0$ eine n-fache Nullstelle. Ist q ein Polynom vom Grade höchstens $n - 1$, so existiert ein $R > 0$ mit

$$|f(z)| > |q(z)| \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} |z| > R.$$

Nach dem Satz von Rouché besitzt das Polynom $p(z) = z^n + q(z)$ also genau n Nullstellen in $B_R(0)$, der Vielfachheit nach gezählt. Dies liefert also einen weiteren Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra*.
b) Den Satz von Rouché kann man ferner auch benutzen um Informationen über die Lage von Nullstellen von Polynomen zu gewinnen. Betrachtet man zum Beispiel das

Polynom $p(z) = z^4 - 4z + 2$ in $B_1(0) \subset \mathbb{C}$, so gilt $|z^4| = 1 < 2 \leq |-4z+2|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Also hat p in $B_1(0)$ ebensoviele Nullstellen wie $q(z) = -4z + 2$, nämlich genau eine.
c) Man kann auch Informationen über die Nullstellen einer Funktion aus der Kenntnis der Nullstellen der Taylorpolynome gewinnen. Genauer gesagt sei p ein Polynom vom Grade $\leq n-1$ und es gelte $f(z) = p(z) + z^n g(z)$ für holomorphe Funktionen f und g in einer Umgebung von $\overline{B_r(0)}$. Gilt $r^n|g(z)| < |p(z)|$ für alle $z \in \partial B_r(0)$, so haben f und p in $B_r(0)$ gleich viele Nullstellen.

Der Satz von Rouché impliziert ferner den folgenden *Satz von Hurwitz*, einem „Erhaltungssatz für Nullstellen".

4.13 Satz. (Satz von Hurwitz).
Ist (f_n) eine Folge von in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphen und nullstellenfreien Funktionen, die in jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f entweder identisch null oder nullstellenfrei in G.

Beweis. a) Zunächst sei $G = D$ eine Kreisscheibe. Dann gilt $\varepsilon := \min_{z\in\partial D}\{|f(z)|\} > 0$. Wählen wir N_D so gross, dass $|f_n - f|_{\partial D} < \varepsilon$ für alle $n > N_D$ gilt, so folgt

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle} \quad z \in \partial D$$

für alle $n \geq N_D$. Die Behauptung für Kreisscheiben D folgt nun direkt aus dem Satz von Rouché.
b) Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, so besitzt f wegen des Identitätssatzes im Kompaktum $\overline{G}$ nur endlich viele Nullstellen. Daher gibt es paarweise disjunkte Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_k$ in G, $k \in \mathbb{N}$, so dass f im Kompaktum $K := \overline{G} \setminus \{D_1 \cup \ldots \cup D_k\}$ keine Nullstellen besitzt. Daher sind bis auf endlich viele Indizes alle Funktionenf_n nullstellenfrei in K. Die Behauptung folgt nun aus der bereits in a) bewiesenen Aussage.

$\square$

Eine Konsequenz dieses Satzes ist das folgende Korollar.

4.14 Korollar. *Es sei (f_n) eine Folge von in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ injektiven holomorphen Funktionen, die in jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder injektiv.*

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die soeben gewonnene Aussage für weitere funktionentheoretische Überlegungen wichtig ist; sie spielt insbesondere beim Beweis des *Riemannschen Abbildungssatzes* eine wichtige Rolle.