IV Isolierte Singularitäten

Im Zentrum dieses Kapitels stehen Funktionen, die mit Ausnahme einzelner Punkte holomorph sind. Die Untersuchung derartiger Funktionen in der Nähe von sogenannten isolierten Singularitäten hat weitreichende Konsequenzen: sie lassen sich um eine isolierte Singularität z_0 in eine Reihe mit negativen und positiven Potenzen von $z - z_0$ entwickeln. Diese sogenannten Laurentreihen werden in Abschnitt 1 eingeführt und diskutiert. Sie gehen auf P.A. LAURENT (1813-1854) zurück, welcher diese schon 1843 einführte. Die Originalarbeit von Laurent wurde allerdings nie veröffentlicht und nur dem Engagement seiner Witwe ist es zu verdanken, dass 1863 ein sogenanntes *Mémoire* publiziert wurde, welches Laurents Beweis wiedergab. Cauchy betont schon 1843, dass Laurent zu dieser Reihenentwicklung durch sorgfältige Analyse seines eigenen Beweises für Potenzreihenentwicklungen geführt worden sei und bemerkt nur „L'extension donnée par M. Laurent...nous parait digne de remarque".

Weierstraß nannte Laurentreihen ebenfalls Potenzreihen und in diesem Sinne sind Laurentreihen eine Theorie für Potenzreihen für Kreisringe. Die in Analysis II kurz diskutierten Fourierreihen sind Laurentreihen um $z_0 = 0$ mit $e^{2\pi i z}$ anstelle von z und man kann zeigen, dass periodische holomorphe Funktionen sich in solche Reihen entwicklen lassen.

Abschnitt 2 widmet sich der Klassifikation von isolierten Singularitäten mittels des Verhaltens der Funktion in ihrer Nähe. Es zeigt sich, dass genau drei verschiedene Typen isolierter Singularitäten auftreten, nämlich Pole, hebbare bzw. wesentliche Singularitäten.

Abschnitt 3 beschäftigt sich mit meromorphen Funktionen. Sie lassen sich, im Gegensatz zu holomorphen Funktionen, nicht nur addieren, subtrahieren und multiplizieren, sondern auch dividieren; speziell bilden die in einem Gebiet meromorphen Funktionen einen Körper im Sinne der Algebra.

Der Cauchysche Integralsatz für holomorphe Funktionen wird in Abschnitt 3 zum sogenannten Residuensatz für Funktionen mit isolierten Singularitäten verallgemeinert. Letzterer ermöglicht nicht nur die Auswertung großer Klassen reeller Integrale durch den Übergang vom Reellen ins Komplexe, sondern hat auch weitere Konsequenzen innerhalb der Funktionentheorie, z.B. auf das Verhalten von Nullstellen holomorpher Funktionen. Historisch gesehen hatte Cauchy das Ziel, eine rigorose Methode zur Berechnung bestimmter Integrale durch den Übergang vom Reellen ins Komplexe zu entwickeln. Prinzipiell bedienten sich schon viele bedeutende Mathematiker vor ihm (wie etwa Euler, Legendre und Laplace) einer solchen Methode bereits zu einer Zeit, als die Theorie der komplexen Zahlen und Konvergenzfragen für Integrale noch nicht streng begründet war. Der Begriff des *Residuums* wir dann von Cauchy erstmals 1826 eingeführt. Um die Aussage des Residuensatzes elegant und allgemein genug formulieren zu können, arbeiten wir hier mit Umlaufzahlen und nullhomologen Zyklen.

1 Laurententwicklungen

In diesem Abschnitt betrachten wir holomorphe Funktionen auf Kreisringen und leiten für diese eine Reihendarstellung, die sogenannte Laurentreihe, her.
Hierzu sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$ und

$$D := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

ein *Kreisring* mit Mittelpunkt z_0 und Radien r_1 und r_2. Weiter sei

$$\begin{array}{lcll} D_1 & := & \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r_1\} & \text{das Äußere des inneren Kreises und} \\ D_2 & := & \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_2\} & \text{das Innere des äußeren Kreises} \end{array}$$

Dann gilt $D_1 \cup D_2 = \mathbb{C}$ und $D_1 \cap D_2 = D$. In dieser Situation lässt sich eine in D holomorphe Funktion in zwei Funktionen aufspalten, von denen die eine in D_1 und die andere in D_2 holomorph ist.

1.1 Lemma. *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann existieren eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $f_j : D_j \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, mit*

$$f(z) = f_2(z) - f_1(z)$$

für alle $z \in D$ und $\lim_{|z|\to\infty} |f_1(z)| = 0$.

Beweis. Wir beginnen mit der Existenz der obigen Zerlegung. Hierzu sei $j \in \{1, 2\}$ und $z \in D_j$. Wir wählen Radien ϱ_j mit $r_1 < \varrho_j < r_2$, so dass $\varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2$ gilt und setzen

$$f_j(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \varrho_j} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Dann ist f_j holomorph auf D_j und es gilt $\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$. Setzen wir $\gamma_1 := \partial B(z_0, \varrho_1)$ und $\gamma_2 := \partial B(z_0, \varrho_2)$, so ist $\gamma := \gamma_2 - \gamma_1$ ein nullhomologer Zyklus in D. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =: f_2(z) - f_1(z).$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $f = g_1 + g_2$ eine weitere Zerlegung mit den obigen Eigenschaften. Dann gilt $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ auf D. Setzen wir

$$h := \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{auf } D_1, \\ g_2 - f_2 & \text{auf } D_2, \end{cases}$$

so ist h holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit $\lim_{|z|\to\infty} |h(z)| = 0$. Nach dem Satz von Liouville folgt dann $h \equiv 0$ und somit $f_1 = g_1$ und $f_2 = g_2$.

□

Wir formulieren nun das Hauptresultat dieses Abschnitts.

1.2 Theorem. *Jede auf $D := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ holomorphe Funktion f besitzt eine eindeutige Potenzreihenentwicklung der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die absolut und lokal gleichmäßig auf D konvergiert. Die Koeffizienten a_n sind gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad r_1 < r < r_2.$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der Eindeutigkeit. Hierzu sei $r_1 < r < r_2$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1-k}}\, dz = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ a_n & k = n, \end{cases}$$

da das obige Integral den Wert 0 bzw. $2\pi i$ für alle $k \neq n$ bzw. für alle $k = n$ besitzt. Für den Beweis der Existenz einer solchen Potenzreihenentwicklung sei oBdA $z_0 = 0$. Lemma 1.1 impliziert dann, dass

$$f(z) = f_2(z) - f_1(z), \quad z \in D$$

gilt, wobei die Funktionen $f_j : D_j \to \mathbb{C}$ für $j = 1, 2$ holomorph sind und $\lim_{|z|\to\infty} |f_1(z)| = 0$ gilt. Nach Kapitel II. 3 ist $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut und lokal gleichmäßig in D_2 konvergent. Setzen wir $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{r_1}\}$ und definieren $h : U \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} f_1(\frac{1}{z}), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

so ist h stetig und holomorph auf U. Letzteres folgt aus dem Satz von Morera. Nach Kapitel II.3 ist h daher in eine Potenzreihe entwickelbar; insbesondere gilt, dass

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n,$$

absolut und lokal gleichmäßig auf U konvergiert. Also gilt

$$f_1(z) = h\Big(\frac{1}{z}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Big(\frac{1}{z}\Big)^n =: -\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n, \quad z \in D_1,$$

mit $a_n := -b_n$. Zusammengefasst gilt also

$$f(z) = f_2(z) - f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n.$$

□

1.3 Bemerkung. a) In der Situation des obigen Theorems heißt f_2 der *Hauptteil* und f_1 der *Nebenteil* von f.
b) Die im obigen Theorem bestimmte „Potenzreihe"heißt *Laurentreihe* der Funktion f.

1.4 Definition. Eine *Laurentreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Sie heißt *konvergent* in einem Punkt $w \in \mathbb{C}$, wenn die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (w - z_0)^{-n}$ konvergieren. Es gilt dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (w - z_0)^{-n}.$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt *Hauptteil* , die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt *Nebenteil* der Laurentreihe. Gleichmäßige Konvergenz einer Laurentreihe bedeutet gleichmäßige Konvergenz des Haupt- und Nebenteils.

1.5 Korollar. *Es sei* $D = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ *und* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion mit zugehöriger Laurentreihe* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. *Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Ind(\gamma, z_0)a_{-1},$$

wobei γ *ein geschlossener Weg in* D *ist.*

Beweis. Es gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_\gamma (z - z_0)^n dz = a_{-1} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = a_{-1} 2\pi i Ind(\gamma, z_0)$$

da $\int_\gamma (z - z_0)^n dz = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts betrachten wir periodische, holomorphe Funktionen und damit zusammenhängend Fourierreihen. Hierzu definieren wir für $a, b \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$ und $b = -\infty$ sowie $\omega \in \mathbb{C}^*$ Parallelstreifen

$$S_\omega := \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Im}\,(z/\omega) < b\}.$$

Mit $z \in S_\omega$ ist offenbar auch $z \pm \omega \in S_\omega$. Eine auf S_ω definierte holomorphe Funktion f heißt *ω-periodisch*, falls

$$f(z + \omega) = f(z), \qquad z \in S_\omega$$

gilt. Die Funktion F gegeben durch $F(z) = e^{2\pi i z/\omega}$ ist offenbar holomorph und ω-periodisch. Sie bildet den Streifen S_ω auf den Kreisring

$$D = \{z \in \mathbb{C} : e^{-2\pi b} < |z| < e^{-2\pi a}\}$$

ab und es gilt $F(z_1) = F(z_2)$, genau dann wenn $z_2 = z_1 + n\omega$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist.
Ist $f : S_\omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe ω-periodische Funktion, so ist $f(F^{-1}(w))$ konstant für alle $w \in D$. Es existiert daher eine eindeutig bestimmte Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ mit $f = \tilde{f} \circ F$, welche auf D sogar holomorph ist. Wir können die Funktion $\tilde{f}$ daher in D in ihre Laurentreihe

$$\tilde{f}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n$$

entwickeln. Für deren Koeffizenten a_n gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} \frac{\tilde{f}(w)}{w^{n+1}} dw, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

mit geeigentem ϱ. Setzt man $w = e^{2\pi i z/\omega}$, so erhalten wir die *Fourier-Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i z/\omega}$$

von f. Sie konvergiert lokal gleichmäßig in S_ω. Beachtet man, dass für $z_0 \in S_\omega$ die Strecke $[z_0, z_0+\omega]$ durch F bijektiv auf die Kreislinie $\partial K_\varrho(0)$ mit $\varrho = |F(z_0)|$ abgebildet wird, so erhalten wir für die Koeffizienten

$$a_n = \int_{[z_0,z_0+\omega]} (\tilde{f} \circ F)(z) \cdot \frac{1}{F(z)^{n+1}} F'(z) dz = \frac{2\pi i}{\omega} \int_{[z_0,z_0+\omega]} f(z) e^{\frac{-2\pi i n z}{\omega}} dz.$$

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

1.6 Satz. *Es sei $\omega \in \mathbb{C}^*$ und $f : S_\omega \to \mathbb{C}$ eine ω-periodische, holomorphe Funktion. Dann lässt sich f in S_ω durch seine Fourierreihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i z/\omega}$$

darstellen, wobei die Koeffizienten a_n durch

$$a_n = \frac{2\pi i}{\omega} \int_{[z_0,z_0+\omega]} f(z) e^{\frac{-2\pi i n z}{\omega}} dz, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

gegeben sind. Die obige Reihe konvergiert lokal gleichmäßig in S_ω.

1.7 Beispiele.
a) Die Eulerschen Formeln

$$\cos z = \frac{1}{2}\big(e^{-iz} + eiz\big), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\big(- e^{-iz} + eiz\big),$$

sind die komplexen Fourierreihen der Cosinus bzw. Sinusfunktion in $\mathbb{C}$.
b) Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{\cos z}$ ist in der oberen Halbebene holomorph mit Periode $\omega = 2\pi$. Wegen $\frac{1}{\cos z} = 2e^{iz} \frac{1}{1+e^{2iz}}$ ist

$$\frac{1}{\cos z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\pi n} e^{(2n+1)iz}, \qquad \operatorname{Im} z > 0,$$

die entsprechene Fourierentwicklung.

2 Isolierte Singularitäten

In diesem Abschnitt leiten wir mit Hilfe der Laurententwicklung eine Klassifikation isolierten Singularitäten holomorpher Funktionen auf Kreisringen her. Wir beginnen mit der Definition einer isolierten Singularität.

2.1 Definition. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0 und $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann heißt z_0 *isolierte Singularität* von f. Ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die eindeutig bestimmte Laurentreihe auf einem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r$ für geeignetes $r > 0$, so heißt

$$\omega_f(z_0) := \inf\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$$

die *Nullstellenordnung* von f in z_0. Weiter gilt

$$\omega_f(z_0) := \begin{cases} +\infty, & a_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \\ -\infty, & a_n \neq 0 \quad \text{für unendlich viele } n < 0. \end{cases}$$

Wir erläutern den Begriff der isolierten Singularität anhand der folgenden Beispiele.

2.2 Beispiele.
a) Die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \qquad & f_1(z) := \frac{\sin z}{z} \\ f_2 : \mathbb{C}^* \backslash \{i\} \to \mathbb{C}, \qquad & f_2(z) := \frac{1}{z(z-i)^2} \\ f_3 : \mathbb{C}* \to \mathbb{C}, \qquad & f_3(z) := e^{1/z} \end{aligned}$$

haben alle eine isolierte Singularität in 0.
b) Die Funktion $f : \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ hat isolierte Singularitäten in allen Punkten $z \in \mathbb{Z}$.

Im Folgenden unterscheiden wir verschiedene Typen von isolierten Singularitäten anhand der Nullstellenordnung $\omega_f(z_0)$. Wir beginnen mit sogenannten hebbaren Singularitäten.

2.3 Satz. (Riemannscher Hebbarkeitssatz).
Es seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in z_0 und $\widetilde{U} := U \cup \{z_0\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

a) *f ist holomorph in z_0 fortsetzbar, d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $g : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ mit $g_{|U} = f$.*

b) *f ist stetig in z_0 fortsetzbar.*

c) *Es existiert eine Umgebung $V \subset \widetilde{U}$ von z_0 derart, dass $f_{|V \cap U}$ beschränkt ist.*

d) *Es gilt $\omega_f(z_0) \geq 0$.*

Gilt $\omega_f(z_0) \geq 0$ oder eine der oben angegebenen äquivalenten Bedingungen, so heißt z_0 eine *hebbare Singularität*.

Beweis. Die Aussagen a)⇒b)⇒c) sind unmittelbar klar.
c)⇒d): Nach Voraussetzung ist $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ für $0 < |z - z_0| < r$ mit geeignetem $r > 0$ und es existiert ein $M \geq 0$ mit

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in V.$$

Die Koeffizienten a_n sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad 0 < \varrho < r, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Daher gilt $|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \varrho \frac{M}{\varrho^{n+1}} = \frac{M}{\varrho^n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, falls ϱ klein genug gewählt ist. Für $n < 0$ und $\varrho \to 0$ folgt somit $a_n = 0$.
d)⇒a): Da $\omega_f(z_0) \geq 0$ ist, gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $0 < |z - z_0| < r$. Setzt man

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a_0, & z = z_0, \end{cases}$$

so ist g holomorph auf $\widetilde{U}$.

□

Ein weitere Klasse von Singularitäten, die sogenannten Pole, werden im nächsten Satz eingeführt.

2.4 Satz. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) *$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, d.h. für alle $c > 0$ existiert eine Umgebung V von z_0 mit $|f(z)| \geq c$ für alle $z \in V \cap U$.*

b) *Es gilt $-\infty < \omega_f(z_0) < 0$.*

Gilt in der obigen Situation $-\infty < \omega_f(z_0) < 0$, so heißt z_0 ein *Pol von f der Ordnung* $-w_f(z_0)$.

Beweis.
a)⇒b): Zu $c = 1$ wähle eine Umgebung V und setze

$$g(z) := \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \in U \cap V, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist g stetig auf V und holomorph auf $V \setminus \{z_0\}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitsatz 2.3 ist somit g ist auf V holomorph und es gilt $\omega_g(z_0) \geq 0$. Weiter, da $g(z_0) = 0$ ist, folgt $0 < \omega_g(z_0)$. Ferner gilt $\omega_g(z_0) < \infty$. Da $\omega_f(z_0) = -\omega_g(z_0)$ gilt (vgl. die Übungen), folgt somit die Behauptung.
b)⇒a): Es sei $f(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ mit $a_{-n} \neq 0$. Dann gilt $f(z) = (z - z_0)^{-n}h(z)$ für eine holomorphe Funktion h mit $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-n}(z - z_0)^j$ mit $h(z_0) \neq 0$. Also gilt $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

□

2.5 Bemerkung. In der Situation des obigen Satzes lassen sich Polstellen der Funktion f wie folgt *charakterisieren.* Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Funktion $f : U \setminus \{z_0\}$ in z_0 genau dann einen Pol der Ordnung m, wenn eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ existiert, derart dass gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad z \in U \setminus \{z_0\}$$

und dies gilt genau dann, wenn eine Umgebung $V \subset U$ und Konstanten $c, C > 0$ existieren mit

$$c|z - z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq C|z - z_0|^{-m}, \qquad z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Den nicht schwierigen Beweis dieser Aussagen überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Ein dritte Klasse von Singularitäten, die sogenannten wesentlichen Singularitäten, wird im folgenden Satz besprochen.

2.6 Satz. (Satz von Casorati-Weierstraß).
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

a) Für alle $w \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge $(z_n) \subset U \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ und $f(z_n) \to w$.

b) Es gilt $\omega_f(z_0) = -\infty$.

Gilt in der obigen Situation $\omega_f(z_0) = -\infty$, so heißt z_0 *wesentliche Singularität* von f.

2.7 Bemerkungen.
a) Der obige Satz wurde erstmals 1868 von dem italienischen Mathematiker Felice CASORATI (1835-1890) bewiesen; unabhängig hiervon gab Weierstraß 1876 einen alternativen Beweis.
b) Die Aussage des Satzes von Casorati-Weierstraß kann auch wie folgt umformuliert werden. Es gilt $\omega_f(z_0) = -\infty$ genau dann, wenn für jede Umgebung V von z_0 die Menge $f(U \cap V)$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Da nicht konstante holomorphe Funktionen offene Abbildungen sind, so ist in der Situation des obigen Satzes die Menge $f(U \setminus \{z_0\})$ sogar *offen* und *dicht* in $\mathbb{C}$. Eine wesentliche Verschärfung dieser Aussage ist der folgende, berühmte *Satz von Picard.*

2.8 Satz. (Satz von Picard).
In der Situation des Satz 2.6 sei V eine Umgebung von z_0. Dann gilt $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$ oder $f(U \cap V) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$ für ein $w \in \mathbb{C}$.

Ein Beispiel für die zuerst beschriebene Situation ist die Funktion $f(z) = \sin z^{-1}$, während $f(z) = e^{z^{-1}}$ ein Beispiel für den zweiten Fall ist. Der Beweis dieses Satzes übersteigt den Rahmen einer einführenden Vorlesung und wir verweisen an dieser Stelle auf die Literatur.

Beweis.
b)$\Rightarrow$a): Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existieren $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{C}$ und eine Umgebung V von z_0 mit $|f(z) - a| > \varepsilon$ für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$. Setzt man

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a},$$

so ist g holomorph auf $V \setminus \{z_0\}$ und es gilt $|g(z)| < \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist g holomorph auf V fortsetzbar und $\lim_{z \to z_0} g(z)$ existiert. Daher besitzt die Funktion f gegeben durch

$$f(z) = a + \frac{1}{g(z)},$$

eine hebbare Singularität, falls $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$ gilt, bzw. einen Pol falls $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ gilt. Nach Satz 2.3 und Satz 2.4 gilt daher $\omega_f(z_0) > -\infty$, im Widerspruch zur Annahme.
a)$\Rightarrow$b): Nach Vorausssetzung besitzt f in z_0 keinen Pol und keine hebbare Singularität. Die Sätze 2.3 und 2.4 implizieren daher, dass $\omega_f(z_0) = -\infty$ gilt.

□

2.9 Bemerkung. Für eine isolierte Singularität treten also genau die drei folgenden Fälle auf:

a) Es gilt $\omega_f(z_0) = -\infty$ und z_0 ist eine wesentliche Singularität.

b) Es gilt $-\infty < \omega_f(z_0) < 0$ und z_0 ist ein Pol.

c) Es gilt $\omega_f(z_0) \geq 0$ und z_0 ist eine hebbare Singularität.

Wir erläutern die verschiedenen Klassen von Singularitäten anhand der folgenden Beispiele.

2.10 Beispiele.
a) Die Funktion f gegeben durch $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat in 0 eine hebbare Singularität, denn es gilt

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots,$$

und somit ist $\omega_f(0) \geq 0$.
b) Die Funktion f gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$ hat einen Pol in 0 der Ordnung 1 sowie einen Pol in i der Ordnung 2.
c) Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots$$

besitzt in 0 eine wesentliche Singularität.
d) Die Funktion f definiert durch $f(z) = \cot(\pi z)$ besitzt in jedem $z \in \mathbb{Z}$ einen Pol erster Ordnung.

3 Meromorphe Funktionen

Der vorherige Abschnitt zeigte, dass das Studium holomorpher Funktionen f in der Nähe von isolierten Singularitäten z_0 übersichtlich bleibt, sofern z_0 eine Polstelle von f ist. Funktionen dieser Art bekamen historisch gesehen schon sehr früh einen eigenen Namen und wurden 1875 von BRIOT und BOUQUET *meromorph* genannt. Sie lassen sich nicht nur addieren, subtrahieren und multiplizieren, sondern, im Gegensatz zu holomorphen Funktionen, auch dividieren; speziell bilden die in einem Gebiet meromorphen Funktionen einen Körper im Sinne der Algebra.

Wir beginnen diesen kurzen Abschnitt mit der Definition von meromorphen Funktionen.

3.1 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, falls eine diskrete Menge $P_f \subset U$ existiert derart, dass
i) $f \in U \setminus P_f$ holomorph ist und
ii) jedes $z_0 \in P_f$ ein Pol von f ist.
Weiter ist $\mathcal{M}(U)$ die Menge aller auf U meromorphen Funktionen, d.h. es gilt

$$\mathcal{M}(U) := \{f : U \to \mathbb{C}, f \text{ meromorph in } U\}.$$

3.2 Bemerkungen.
a) Die Menge P_f heißt *Polstellenmenge* von f und ist offensichtlich abgeschlossen. Insbesondere, da $P_f = \emptyset$ zugelassen ist, sind in U holomorphe Funktionen natürlich auch meromorph.
b) Da P_f diskret und abgeschlossen ist folgt (analog zur Situation des Identitätssatzes), dass die Polstellenmenge einer in U meromorphen Funktion entweder leer oder endlich oder abzählbar ist.
c) In U meromorphe Funktionen mit $P_f \neq \emptyset$ sind *keine* Abbildungen $U \to \mathbb{C}$. Unsere im vorigen Abschnitt gegebenen Charakterisierung von Polstellen legt es nahe, als Funktionswert in einer Polstelle das Element ∞ zu wählen:

$$f(z) := \infty, \qquad z \in P_f.$$

Somit können wir in U meromorphe Funktionen als spezielle Abbildungen $U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auffasssen.
d) Wir nennen eine Funktion f *meromorph in* $z_0 \in U$, falls f in einer Umgebung von z_0 meromorph ist. Jede solche Funktion $f \not\equiv 0$ besitzt daher in einer Umgebung von z_0 die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}, a_m \neq 0$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.

3.3 Beispiele.
a) Jede rationale Funktion f gegeben durch

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}, \qquad b_n \neq 0, n, m \in \mathbb{N},$$

ist meromorph in $\mathbb{C}$. Die Polstellenmenge P_f ist endlich.
b) Die Cotangensfunktion cot definiert durch $\cot(\pi z) = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ ist meromorph aber nicht rational. Für die Polstellenmenge $P_{\cot}$ gilt $P_{\cot} = \mathbb{Z}$.

Meromorphe Funktionen lassen sich auf natürliche Weise addieren, subtrahieren und multiplizieren. Wir überlassen es dem Leser als Übungsaufgabe zu zeigen, dass mit $f, g \in \mathcal{M}(U)$ auch $f \pm g$ sowie $fg \in \mathcal{M}(U)$ gilt. Die Rechenregeln für holomorphe Funktionen implizieren weiter das folgenden Lemma.

3.4 Lemma. *Die Menge $\mathcal{M}(U)$ aller auf U meromorphen Funktionen ist eine Algebra bezüglich Addition und Multiplikation, welche die Algebra $\mathcal{H}(U)$ aller auf U holomorphen Funktionen als Unteralgebra enthält. Für $f, g \in \mathcal{M}(U)$ gilt*

$$P_f = P_{-f}, \qquad P_{f \pm g} \subset P_f \cup P_g, \qquad P_{fg} \subset P_f \cup P_g.$$

Im Ring $\mathcal{H}(U)$ der auf U holomorphen Funktionen darf man genau dann durch $g \in \mathcal{H}(U)$ teilen, wenn g keine Nullstellen in U besitzt. Im Folgenden zeigen wir, dass man im Ring $\mathcal{M}(U)$ auch durch Funktionen dividieren darf, die Nullstellen besitzen. Unter der *Nullstellenmenge N_f einer meromorphen Funktion* $f \in \mathcal{M}(U)$ verstehen wir die Nullstellenmenge der holomorphen Funktion $f_{|U \setminus P_f} \in \mathcal{H}(U \setminus P_f)$. Offensichtlich ist N_f abschlossen in U. Es gilt dann der folgende Satz.

3.5 Satz. *Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, sind folgende Aussagen äquivalent.*
a) Es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{M}(U)$ mit $fg = 1$,
b) Die Nullstellenmenge N_f ist diskret in U.

Beweis. Nach Aussage a) gilt $f(z_0) = 0$ genau dann wenn $g(z_0) = \infty$, bzw. $f(z_0) = \infty$ genau dann wenn $g(z_0) = 0$ ist. Dies bedeutet $N_f = P_g$ und $P_f = N_g$ und insbesondere ist die Nullstellenmenge N_f als Polstellenmenge einer in U meromorphen Funktion g diskret in U.
Umgekehrt folgt aus Aussage b), dass die Menge $M := N_f \cup P_f$ diskret und abgeschlossen ist in U. Daher ist $g := 1/f$ holomorph auf $U \setminus M$. Jeder Punkt von N_f ist ein Pol von g und jeder Punkt von P_f ist eine hebbare Singularität von g und somit gilt $g \in \mathcal{M}(U)$.

□

Nach dem obigen Satz ist im Ring $\mathcal{H}(U)$ der Quotient f/g zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(U)$ genau dann definiert, wenn N_g diskret in U ist.
Eine wichtige Folgerung des obigen Satzes ist die folgende Aussage.

3.6 Korollar. *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so ist $\mathcal{M}(G)$ ein Körper.*

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{M}(G)$ nicht das Nullelement. Dann ist $f_{|G \setminus P_f}$ nicht das Nullelement von $\mathcal{H}(G \setminus P_f)$. Da mit G auch $G \setminus P_f$ ein Gebiet ist (Übungsaufgabe), ist N_f diskret in G und die Behauptung folgt aus obigem Satz.

□

Wir beschliessen diesen kurzen Abschnitt mit zwei weiteren Bemerkungen über die algebraische Natur von $\mathcal{M}(G)$.

3.7 Bemerkungen.
a) Wir wählen speziell $G = \mathbb{C}$. Dann enthält der Körper $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ den Körper $\mathbb{C}[z]$ der rationalen Funktionen als *echten* Unterkörper, da etwa $\cot z \notin \mathbb{C}[z]$ gilt.
b) Wir wissen aus der Algebra, dass jeder Integrationsring einen kleinsten ihn umfassenden Körper, d.h. seinen *Quotientenkörper* besitzt. Es ist klar, dass der Quotientenkörper von $\mathcal{H}(G)$ im Körper $\mathcal{M}(G)$ enthalten ist. Es gilt weiter die deutlich schwieriger zu beweisende Aussage, dass *der Körper* $\mathcal{M}(G)$ *der Quotientenkörper von* $\mathcal{H}(G)$ *ist.*

4 Der Residuensatz

Der Residuensatz ist die Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf Funktionen mit isolierten Singularitäten und besitzt als solcher zahlreiche Anwendungen in der gesamten Analysis. Im Beweis führen wir seine Aussage via der Laurentdarstellung auf den Cauchyschen Integralsatz zurück.
Genauer gesagt, sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion, welche in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ in ihre Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ entwickelt sei, wobei r so gewählt ist, dass f höchstens in z_0 eine isolierte Singularität besitzt.

4.1 Definition. In der obigen Situation heißt $\mathrm{Res}_f(z_0) := a_{-1}$ das *Residuum von f in z_0*.

4.2 Bemerkung. Nach Theorem 1.2 gilt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varrho} f(z)dz, \qquad 0 < \varrho < r.$$

4.3 Beispiele.
a) Ist $\omega_f(z_0) \geq -1$, so gilt

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Es gilt nämlich $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$ für eine holomorphe Funktion g und somit ist $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$. Insbesondere besitzt

i) die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ in z_0 das Residuum 1,

ii) die Funktion $z \mapsto \frac{1}{(z-z_0)^5}$ in z_0 das Residuum 0.

iii) und $z \mapsto \frac{1}{z(z-i)^2}$ in 0 das Residuum -1.

b) Gilt $\omega_f(z_0) \geq 0$, so folgt $\mathrm{Res}_f(z_0) = 0$.
c) Eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(U)$ heißt *Nichtnullteiler* in $\mathcal{M}(U)$, falls für alle $g \in \mathcal{M}(U)$ mit $g \not\equiv 0$ gilt: $fg \neq 0$. Für eine solche Funktion und $z_0 \in U$ gilt

$$\mathrm{Res}_{f'/f} z_0 = \omega_f(z_0).$$

Beweis als Übungsaufgabe!
d) Ist $z_0 \in U$ ein einfacher Pol von $f : U \to \mathbb{C}$ und ist g holomorph in z_0, so gilt

$$\mathrm{Res}_{fg}(z_0) = g(z_0)\mathrm{Res}_f(z_0).$$

e) Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer einfachen Nullstelle in $z_0 \in U$ und ist g in z_0 holomorph mit $g(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\mathrm{Res}_{g/f}(z_0) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

f) Besitzt $f : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt für g definiert durch $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

Wie empfehlen den Beweis der Aussagen d)e) und f) als Übungsaufgaben durchzuführen.

Das folgende Theorem ist das Hauptergebnis dieses Abschnitts.

4.4 Theorem. (Residuensatz).
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $S \subset M$ diskret und $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ist γ ein nullhomologer Zyklus in U mit $\mathrm{spur}(\gamma) \cap S = \emptyset$*, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{\omega \in S} I(\gamma, \omega) \mathrm{Res}_f(\omega).$$

Es ist interessant zu bemerken, dass die obige Summe endlich ist, da $Ind(\gamma, \omega) \neq 0$ nur für endlich viele Singularitäten von f gilt.

Beweis. Es seien $z_1, \ldots, z_m$ die isolierten Singularitäten von f mit $I(\gamma, z_i) \neq 0$. Die Laurentreihe von f um z_i lautet

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_i)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_i)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_i)^n.$$

Bezeichnet man den ersten Summanden auf der rechten Seiten mit $h_i(z)$, so ist h_i holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{z_i\}$ und somit ist $f - \sum_{i=1}^m h_i$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus S$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{i=1}^m \int_\gamma h_i(z)dz = \sum_{i=1}^m \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,i}(z - z_i)^n dz \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_\gamma a_{n,i}(z - z_i)^n dz = \sum_{i=1}^m a_{-1,i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_i} dz \\
&= \sum_{i=1}^m \mathrm{Res}_f(z_i) I(\gamma, z_i) 2\pi i.
\end{aligned}$$

□