III Der globale Cauchysche Integralsatz

In diesem Kapitel werden wir unsere bisherigen Überlegungen über Kurvenintegrale vertiefen und nocheinmal ausbauen. Diejenigen geschlossenen Integrationswege γ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, für welche $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für eine in G holomorphe Funktion f gilt, lassen sich geometrisch charakterisieren: es sind genau diejenigen Wege, die keinen Punkt des Komplements von G „im Inneren“ enthalten.
Diese Vorstellung wird im ersten Abschnitt durch den Begriff der Umlaufzahl präzisiert. Im ersten Abschnitt werden wir diese für Zyklen, d.h. also geschlossene Ketten, einführen. Der Begriff der Umlaufzahl ist im folgenden Abschnitt 2 über die globale Cauchysche Integralformel ein wichtiges Hilfsmittel. Er erlaubt es präzise geometrische Bedingungen anzugeben, unter denen der Cauchysche Integralsatz bzw. die Cauchyschen Integralformeln auf allgemeinere Gebiete als bisher betrachtet, verallgemeinert werden können. Von zentraler Bedeutung in diesem Zusammenhang sind sogenannte nullhomologe Zyklen. Besonders zu erwähnen ist auch die Tatsache, dass die in Abschnitt 2 vorgestellten sehr eleganten Beweise des globalen Cauchyschen Satzes erst 1971 von John DIXON entwickelt wurden.

1 Umlaufzahlen

Wir beginnen diesen Abschnit mit der Definition einer Kette bzw. eines Zyklus.

1.1 Definition. Es seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ Wege in $\mathbb{C}$, $K := \operatorname{spur} \gamma_1 \cup \ldots \cup \operatorname{spur} \gamma_n$ und $T_j : C(K) \to \mathbb{C}$ lineare Abbildungen definiert durch $T_j f := \int_{\gamma_j} f(z)dz$.
a) Eine *Kette* γ ist eine formale Summe

$$\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n,$$

welche durch die Vorschrift

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

induziert wird. Ferner gilt spur $\gamma := K$.
b) Ist γ_j für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein Weg in einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$, so heißt γ eine *Kette in G*.
c) Ist γ_j für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein geschlossener Weg, so heißt γ ein *Zyklus* .

1.2 Bemerkungen. a) Eine Kette kann natürlich auf verschiedene Weisen dargestellt werden. Es gilt dann

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = \mu_1 + \ldots + \mu_m,$$

falls $\text{spur}\gamma_1 \cup \ldots \cup \text{spur}\gamma_n = \text{spur}\mu_1 \cup \ldots \cup \text{spur}\mu_m =: K$ und

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mu_j} f(z)dz, \quad f \in C(K)$$

gilt.
b) Ist weiter $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ eine Kette, so schreiben wir $-\gamma$ für die Kette, die entsteht, wenn jeder Weg γ_j durch den Weg $-\gamma_j$ ersetzt wird.
c) Die *Summe von Ketten* ist klarerweise wie folgt definiert. Für zwei Ketten γ und μ ist die Summe $\gamma + \mu$ bestimmt durch spur $(\gamma + \mu) =$ spur $(\gamma) \cup$ spur (μ) und

$$\int_{\gamma+\mu} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\mu} f(z)dz, \quad f \in C(\text{spur } \gamma \cup \text{spur } \mu).$$

1.3 Beispiele. a) Klarerweise ist jede Linearkombination von geschlossenen Wegen (definiert analog zu c)) ein Zyklus.
b) Ist γ ein Integrationsweg, so ist die Kette $\gamma + -(\gamma)$ natürlich ein Zyklus.

Wir definieren nun den wichtigen Begriff der Umlaufzahl.

1.4 Definition. Es sei γ ein Zyklus und $w \in \mathbb{C} \setminus \text{spur } \gamma$. Dann heißt

$$Ind(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz$$

die *Umlaufzahl* bzw. der *Index* von γ bezüglich w.

Aus geometrischer Sicht ist es zunächst ziemlich unklar, warum der obige Ausdruck Umlaufzahl genannt werden soll. Erst die folgenden Untersuchungen werden den Begriff der Umlaufzahl dann veranschaulichen können. Wir notieren jedoch zwei unmittelbare Folgerungen aus der Definition. Für zwei Zyklen γ_1 und γ_2 gilt

$$\begin{aligned} Ind(\gamma_1+\gamma_2,w) &= Ind(\gamma_1,w)+Ind(\gamma_2,w), \qquad w\notin \operatorname{spur}\gamma_1\cup\operatorname{spur}\gamma_2 \\ Ind(-\gamma_1,w) &= -Ind(\gamma_1,w), \qquad w\notin\operatorname{spur}\gamma_1. \end{aligned}$$

Warum heißt $Ind(\gamma,w)$ Umlaufzahl von γ um w? Die folgende Beispiele zeigen zumindest, dass $Ind(\gamma,w)$ die Anzahl der Umläufe von γ um w misst, falls der Zyklus γ durch Summen von Kreislinien gegeben ist.

1.5 Beispiele.
a) Für $w\in\mathbb{C}$ und $m\in\mathbb{N}$ sei $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t):=w+re^{imt}$. Dann gilt

$$Ind(\gamma,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-w}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{imre^{imt}}{re^{imt}}dt=m.$$

Im Falle $m=1$ liefert die Cauchysche Integralformel weiter $Ind(\gamma,z)=1$ für alle $z\in B_r(w)$. Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete impliziert jedoch, dass

$$Ind(\gamma,z)=0 \quad \text{für alle} \quad z\in\mathbb{C}\setminus B_r(w)$$

gilt.
b) Ist $\gamma=\partial B_R(z_0)-\partial B_r(z_1)$ die Differenz zweier Kreislinien und gilt $B_r(z_1)\subset\subset B_R(z_0)$, so gilt

$$Ind(\gamma,z)=\begin{cases}1, & z\in B_R(z_0)\setminus B_r(z_1)\\ 0, & |z-z_1|<r \text{ oder } |z-z_0|>R.\end{cases}$$

1.6 Satz. *Ist γ ein Zyklus und $z\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{spur}\gamma$, so gilt $Ind(\gamma,z)\in\mathbb{Z}$.*

Beweis. Es sei $\gamma=\sum_{j=1}^n\alpha_j\gamma_j$ ein Zyklus, wobei wir OBdA annehmen dürfen, dass jedes γ_j über $[0,1]$ parametrisiert ist. Wir beweisen Im Folgenden nur den Fall von differenzierbaren Zyklen; der allgemeine Fall sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Definiert man $F:[0,1]\to\mathbb{C}$ durch

$$F(t):=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n\alpha_j\int_0^t\frac{\gamma_j'(s)}{\gamma_j(s)-z}ds,$$

so gilt $F(0)=0$ und $F(1)=Ind(\gamma,z)$. Da F stetig und stückweise differenzierbar ist, gilt dies auch für die Funktion G definiert durch $G(t):=e^{-2\pi iF(t)}\prod_{j=1}^n\big(\gamma_j(t)-z\big)^{\alpha_j}$ und es gilt

$$G'(t)=e^{-2\pi iF(t)}\prod_{j=1}^n(\gamma_j'(t)-z)^{\alpha_j}\big[-2\pi iF'(t)+\sum_{j=1}^n\frac{\alpha_j\gamma_j'(t)}{\gamma_j(t)-z}\big]=0.$$

Deshalb ist G auf $[0,1]$ stückweise konstant und es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(t) - z)^{\alpha_j} = c e^{2\pi i F(t)}, \qquad t \in [0,1].$$

Insbesondere folgt $c \neq 0$. Da γ ein Zyklus ist, folgt

$$\prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(0) - z)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(1) - z)^{\alpha_j},$$

und somit ist

$$e^{2\pi i F(1)} = e^{2\pi i F(0)} = 1.$$

Daher gilt $F(1) = Ind(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

□

Eine weitere Eigenschaft der Umlaufzahl wird im folgenden Satz beschrieben.

1.7 Satz. *Ist γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}(\gamma)$, so gilt*
a) $Ind(\gamma, z)$ ist konstant auf jeder Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}\,(\gamma)$,
b) $Ind(\gamma, z) = 0$ auf der unbeschränkten Wegkomponente.

Beweis. Da die in der Definition von $Ind(\gamma, z)$ auftretenden Integranden stetig sind, gilt dies auch für die auf $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}\,\gamma$ definierte Funktion $z \mapsto Ind(\gamma, z)$. Weiter, da $Ind(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ gilt, ist $Ind(\gamma, z)$ auf jeder Wegkomponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}\,(\gamma)$ konstant. Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{spur}\,\gamma \subset \overline{B_R}(0)$ für ein $R > 0$. Das Komplement $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R}(0)$ ist offen, zusammenhängend, hat leeren Schnitt mit $\mathrm{spur}\,\gamma$ und ist die unbeschränkte Wegkomponente. Ferner enthält sie eine Folge (z_n) mit $\mathrm{dist}(z_n, \mathrm{spur}\,\gamma) \to \infty$. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} Ind(\gamma, z_n) = 0,$$

und wegen der Ganzzahligkeit von $Ind(\gamma, z)$ nach a) folgt $Ind(\gamma, z) = 0$ auf der unbeschränkten Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spur}\,(\gamma)$.

□

2 Der globale Cauchysche Integralsatz

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete bzw. die Cauchyschen Integralformeln für Kreise auf allgemeinere Gebiete in $\mathbb{C}$. Die folgende Definition ist hierfür von zentraler Bedeutung.

2.1 Definition.
Ist $G \subset \mathbb{C}$ offen, so heißt ein Zyklus γ in G *nullhomolog*, falls für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus G$

$$Ind(\gamma, z) = 0$$

gilt. Weiter heißen zwei Zyklen γ_1 und γ_2 *homolog* in G, falls $\gamma_1 - \gamma_2$ nullhomolog in G ist.

2.2 Beispiele.
a) Es sei $G = \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ sei für $r > 0$ gegeben durch $\gamma_r(t) = re^{it}$. Dann gilt

$$Ind(\gamma_r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz = 1,$$

und somit ist γ_r nicht nullhomolog.
b) Für die Differenz von γ_{r_1} und γ_{r_2} mit $r_1, r_2 > 0$, d.h. für $\gamma := \gamma_{r_1} - \gamma_{r_2}$ gilt

$$Ind(\gamma, 0) = Ind(\gamma_{r_1}, 0) - Ind(\gamma_{r_2}, 0) = 1 - 1 = 0.$$

Also ist γ nullhomolog.
c) Im Folgenden skizzieren wir einige Beispiele von homologen Zyklen.

i)

Die skizzierten Wege γ_1 und γ_2 sind homolog. Dies ist für Punkte w innerhalb der Wege klar, da die Umlaufzahlen jeweils 1 sind. Liegt w in einer unbeschränkten Wegkomponente, so ist die Umlaufzahl 0.

ii)

Der skizzierte Weg windet sich zunächst um das obere Loch gegen den Uhrzeigersinn, dann um das untere Loch im Uhrzeigersinn, dann um das obere bzw. untere Loch im umgekehrter Richtung. Dieser Zyklus ist nullhomolog.

iii)

Der hier beschriebene Weg ist nullhomolog.

d) Ein Beispiel eines nichtnullhomologen Zyklus ist in der folgende Skizze gegeben.

2.3 Bemerkung. Definiert man das Innere von γ durch

$$\operatorname{Inn}(\gamma) := \{w \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{spur}\,(\gamma) : Ind(\gamma, w) \neq 0\},$$

so ist γ nullhomolog in einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$, genau dann wenn $\operatorname{Inn}(\gamma) \subset G$ gilt.

Das folgende Theorem ist eines der Hauptergebnisse der Funktionentheorie.

2.4 Theorem. (Globaler Cauchyscher Integralsatz und globale Cauchysche Integralformel).
Es seien $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und γ ein nullhomologer Zyklus in G. Dann gilt:

a) $\int_\gamma f(z)dz = 0.$

b) Für alle $z_0 \in G \setminus \operatorname{spur}\,(\gamma)$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$Ind(\gamma, z_0) f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Beweis. Wir notieren zunächst, dass die Aussage a) aus der Aussage b) folgt. Um dies einzusehen, sei $z_0 \in G \setminus \operatorname{spur}\,\gamma$ und F sei definiert durch $F(z) = f(z)(z - z_0)$. Dann ist F holomorph auf G und es gilt $F(z_0) = 0$. Nach Aussage b) mit $n = 0$ gilt

$$0 = Ind(\gamma, z_0) F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(z)}{(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz,$$

also die Behauptung.
Im Folgenden beweisen wir daher die Aussage b). Wir beschränken uns dabei auf den Fall $n = 0$; der Fall für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgt dann durch differenzieren.
Nach Definition gilt $Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(\xi - z_0)} d\xi$ und somit ist die Behauptung äquivalent dazu, dass

$$h(z) := \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0, \qquad z \notin \text{spur } (\gamma),$$

gilt. Im Folgenden beweisen wir, dass h zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann, für welche $\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$ gilt. Der Satz von Liouville impliziert dann $h = 0$ und somit die Behauptung.
Wir unterteilen den Beweis in 4 Teilschritte und definieren zunächst die Funktion $g : G \times G \to \mathbb{C}$ durch

$$g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z. \end{cases}$$

Schritt 1. Die Funktion g ist stetig auf $G \times G$.
Für $(\xi_0, z_0) \in G \times G$ mit $\xi_0 \neq z_0$ ist g als Quotient stetiger Funktionen wiederum stetig.
Gilt $\xi_0 = z_0$, so betrachten wir $g(\xi, z) - g(z_0, z_0)$ auf $U_\delta(z_0) \times U_\delta(z_0)$, wobei $U_\delta(z_0)$ eine Umgebung von z_0 bezeichnet. Gilt $\xi = z$, so folgt

$$|g(\xi, z) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| \to 0 \qquad \text{für } z \to z_0,$$

da f' stetig ist. Gilt $\xi \neq z$, so folgt

$$\begin{aligned} |g(z, z) - g(z_0, z_0)| &= \left|\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} - f'(z_0)\right| = \left|\frac{1}{\xi - z}\int_{[z,\xi]} (f'(w) - f'(z_0)) dw\right| \\ &\leq \frac{1}{|\xi - z|}|\xi - z| \sup_{w \in [z,\xi]} |f'(w) - f'(z_0)| \quad \to 0, \qquad \text{für } z \to z_0, \end{aligned}$$

wiederum da f' in z_0 stetig ist.
Schritt 2. Definiert man die Funktion $h_0 : G \to \mathbb{C}$ via

$$h_0(z) := \int_\gamma g(\xi, z) d\xi,$$

so ist h_0 holomorph auf G.
Um dies zu beweisen, wollen wir den Satz von Morera anwenden. Hierzu sei $\partial\triangle$ der Rand eines Dreiecks $\triangle$ in G. Dann gilt

$$\int_{\partial\triangle} h_0(z) dz = \int_{\partial\triangle}\int_\gamma g(\xi, z) d\xi dz = \int_\gamma \int_{\partial\triangle} g(\xi, z) dz d\xi,$$

da wegen der Stetigkeit des Integranden die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf. Für festes ξ ist die Funktion $g(\xi,\cdot)$ holomorph in G und der Satz von Goursat impliziert, dass

$$\int_{\partial\triangle} g(\xi,z)dz = 0$$

und somit auch $\int_\gamma h_0(z)dz = 0$ gilt.
Schritt 3. Holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.
Setzt man $G_0 := \{z \in \mathbb{C} : Ind(\gamma,z) = 0\}$, so besitzt h_0 auf $G \cap G_0$ die Darstellung

$$h_0(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =: h_1(z), \qquad z \in G \cap G_0.$$

Nun ist h_1 holomorph auf G_0 und wir können h_0 via

$$h(z) := \begin{cases} h_0(z), & z \in G \\ h_1(z), & z \in G_0 \end{cases}$$

zu einer holomorphen Funktion auf $G \cup G_0$ fortsetzen. Nach Vorausssetzung ist γ ein nullhomologer Zyklus in G und somit gilt $G \cup G_0 = \mathbb{C}$, d.h. h ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.
Schritt 4. Anwenden des Satzes von Liouville.
Für $z \in G_0$ gilt

$$|h(z)| \leq L(\gamma) \max_{z\in\gamma} |f(z)| \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\gamma)},$$

und da G_0 das Komplement eines hinreichend großen Kreises um 0 enthält, gilt die obige Abschätzung auch dort. Daher ist h beschränkt und nach dem Satz von Liouville ist h somit konstant. Wählt man eine Folge (z_n) in G_0 mit $|z_n| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $h \equiv 0$ und somit die Behauptung.

□

Eine wichtige Konsequenz des obigen Theorems ist die Tatsache, dass für homologe Zyklen γ_1 und γ_2 das Integral über den Zyklus γ_1 einer holomorphen Funktion durch den Zyklus γ_2 ersetzt werden kann ohne den Wert des Integrals zu verändern.

2.5 Korollar. *Es seien γ_1 und γ_2 homologe Zyklen auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Neben den bisher betrachteten nullhomologen Wegen ist ein weiteres topologisches Konzept für den Cauchyschen Integralsatz von Interesse, die sogenannte Homotopie von Wegen.

2.6 Definition. a) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ eine offene, nicht leere Menge und $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to G$ zwei Wege in G mit gleichem Anfangspunkt $a \in G$ und Endpunkt $e \in G$. Dann heißen γ_1 und γ_2 *homotop in* G, falls eine stetige Funktion $h : [0,1] \times [0,1] \to G$ existiert mit

$$h(\cdot, 0) = \gamma_1, \quad h(\cdot, 1) = \gamma_2, \quad h(0, \tau) = a, \quad h(1, \tau) = e, \quad \text{für } \tau \in [0,1].$$

b) Weiter heißt eine Weg γ *nullhomotop*, falls γ homotop zum konstanten Weg $\tilde{\gamma}(t) := c$, $t \in [0,1]$, für ein $c \in G$ ist.

Sowohl die Homologie als auch die Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen geschlossener Wege bezüglich Homotopie in G wird als *Fundamentalgruppe* von G bezeichnet. Ist $G \subset \mathbb{C}$ offen und sind $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ geschlossene Wege in G, so kann man zeigen, dass γ_1 und γ_2 homolog sind, sofern sie homotop sind.

Wir zeichnen eine Klasse von Gebieten, für welche der Cauchysche Integralsatz ohne Homologievoraussetzung anwendbar ist, besonders aus.

2.7 Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ in dem jeder Zyklus nullhomolog ist, heißt *einfach zusammenhängend.*

Einfach zusammenhängende Gebiete sind also genau diejenigen Gebiete in denen

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

gilt für jede auf G holomorphe Funktion f und jeden Zyklus γ in G. Klarerweise ist also jedes konvexe Gebiet einfach zusammenhängend.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Charakterisierung einfach zusammenhängender Gebiete. Den Beweis wollen wir an dieser Stelle jedoch nicht führen.

2.8 Satz. *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind folgende Ausagen äquivalent.*

a) G ist einfach zusammenhängend.

b) Ist $A = A_1 \cup A_2$ eine Zerlegung von $A = \mathbb{C} \setminus G$ in abgeschlossene und disjunkte Teilmengen A_1 und A_2, so ist A_i für ein $i \in \{1,2\}$ genau dann kompakt, wenn $A_i = \emptyset$ gilt.

Anschaulich kann man einfach zusammenhängende Gebiete also dadurch beschreiben, dass sie keine „Löcher" besitzen.

G_1 ist einfach zusammenhängend, G_2 und G_3 sind es nicht.

Topologisch gesehen lässt sich mittels der Indexfunktion auch das Innnere bzw. das Äußere eines geschlossenen Weges definieren. Genauer gesagt, ist γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$, so heißen die Mengen

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{spur}\gamma : Ind(\gamma, z) \neq 0\} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{spur}\gamma : Ind(\gamma, z) = 0\},$$

das *Innere* bzw. das *Äußere* von γ. Dann ist

$$\mathbb{C} = \mathrm{Int}(\gamma) \cup \mathrm{spur}(\gamma) \cup \mathrm{Ext}(\gamma)$$

eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{C}$. Da die Indexfunktion lokal konstant ist, sind die Mengen $\mathrm{Int}(\gamma)$ und $\mathrm{Ext}(\gamma)$ offen in $\mathbb{C}$ und für den topologischen Rand von $\mathrm{Int}(\gamma)$ und $\mathrm{Ext}(\gamma)$ gilt

$$\partial \mathrm{Int}(\gamma) \subset \mathrm{spur}(\gamma) \quad \text{und} \quad \partial \mathrm{Ext}(\gamma) \subset \mathrm{spur}(\gamma).$$

Weiter gilt die folgende Aussage.

2.9 Satz. *Ist γ ein geschlossener Integrationsweg und gilt* $\mathrm{spur}(\gamma) \subset B_r(z_0)$ *für ein* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und ein* $r > 0$, *so gilt*

$$\mathrm{Int}(\gamma) \subset B_r(z_0) \quad \textit{und} \quad \mathbb{C} \setminus B_r(z_0) \subset \mathrm{Ext}(\gamma).$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.