# 4 Elementare Funktionen und ihre Umkehrungen

In diesem Abschnitt diskutieren wir elementare Funktionen, wie etwa die Exponentialfunktion, den Logarithmus, die Sinus- und Cosinusfunktion, sowie Potenz und Wurzelfunktion für komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$.
Während in der reellen Analysis der maximale Definitionsbereich einer Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion oft leicht anzugeben war, ist dies im Komplexen meist schwieriger. Betrachtet man zum Beispiel die Funktion $z \mapsto z^2$, so existieren zu jedem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Umgebung $U$ von $w$ und zwei auf $U$ holomorphe Funktionen $f_1$ und $f_2$ mit $f_1(z)^2 = f_2(z)^2 = z$, aber keine auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion, die jedem $z$ eine Wurzel von $z$ zuordnet. Dieses Verhalten ist für die Umkehrung aller lokal injektiven holomorphen Funktionen typisch. Wir werden sehen, dass alle Eigenschaften der Umkehrfunktion der Potenzfunktion auf das Verhalten des Logarithmus, der Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, zurückgeführt werden kann.

Wir beginnen daher mit einer Erinnerung an die Exponentialfunktion . Diese ist für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Der Satz von Weierstraß, Satz 2.9 (oder Beispiel I.1.6 b)) impliziert, dass die Exponentialfunktion eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist. Es gilt weiter das Additionsgesetz der Exponentialfunktion

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Dies kann man zum Beispiel auch wie folgt einsehen. Es seien $g$ und $h$ Funktionen auf $\mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = \exp(z+w)$ bzw. $g(z) = \exp(z)\exp(w)$. Dann stimmen $g$ und $h$ auf $\mathbb{R}$ überein und der Identitätssatz impliziert, dass $h = g$ auf ganz $\mathbb{C}$ gilt.
Die Funktionen sin und cos werden auf $\mathbb{C}$ ebenfalls durch ihre Potenzreihe definiert, und zwar durch

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Wiederum impliziert der Satz von Weierstraß, Satz 2.9, dass die Sinus- und die Cosinusfunktion holomorphe Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$ sind. Weiter gilt die Beziehung

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{ Eulersche Formel }).$$

Ersetzt man in obiger Darstellung $z$ durch $-z$, so ergibt sich

$$\cos z = \frac{1}{2}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big).$$

Ferner gilt

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Tangens und Cotangensfunktionen sind ferner definiert als

$$\begin{aligned} \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \\ \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Für ihre Ableitungen gilt

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z, \quad \text{bzw.} \quad (\cot z)' = \frac{-1}{\sin^2 z} = -(1 + \cot^2 z).$$

Schließlich lassen sich auch die Hyperbelfunktionen aus der reellen Analysis in natürlicher Weise zu holomorphen Funktionen in der komplexen Ebene fortsetzen. Genauer setzen wir

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \qquad \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$

und die Eulersche Formel liefert

$$\sinh z = \frac{1}{i} \sin iz, \qquad \cosh z = \cos iz.$$

Für $z = x + iy$ ergibt sich

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Insbesondere gilt $e^{2\pi i} = 1$ und somit $e^{z+2k\pi i} = e^z$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Somit besitzt die komplexe Exponentialfunktion die Periode $2\pi i$.
Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$, d.h.

Dann ist die Exponentialfunktion bijektiv von $S$ auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, denn die Gleichung $e^w = z$ hat genau eine Lösung $w$ gegeben durch $w = \log|z| + i \arg z$.

**4.1 Definition.** (komplexer Logarithmus). Für alle $z \in \mathbb{C}^*$ existieren unendlich viele $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$, nämlich $w = \log|z| + i \arg z$. Jedes solche $w$ heißt *Logarithmus* von $z$.

Ist $G$ ein den Nullpunkt nicht enthaltendes Gebiet, so kann man natürlich viele Abbildungen definieren, die einer Zahl $z \in G$ einen ihrer Logarithmen zuordnet. Deutlich schwieriger ist es zu entscheiden, ob man die Zuordnung so treffen kann, dass die entstehende Abbildung eine stetige oder holomorphe Funktion darstellt.

**4.2 Definition.** Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in G$ heißt *Zweig des Logarithmus auf G*.

Ist $f$ ein Zweig des Logarithmus auf $G$, so sind die Funktionen $f_k$ definiert durch

$$f_k(z) := f(z) + 2\pi ik$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ebenfalls Zweige des Logarithmus. Dies sind aber auch alle Zweige, denn: Sei $g : G \to \mathbb{C}$ ein weiterer Zweig des Logarithmus. Dann gilt $e^{f(z)-g(z)} = \frac{z}{z} = 1$ und somit $f(z) - g(z) = 2\pi ik(z)$ für eine stetige Funktion $k$. Daher ist $k$ stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an. Also ist $k$ konstant.

Analog zur Situation des Logarithmus, besitzt die Argumentfunktion ebenfalls Zweige. Hierzu sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(z) = \arg z$ für alle $z \in G$ heißt dann *Zweig der Argumentfunktion*.

**4.3 Bemerkung.** Ist $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, so existiert eine Zweig des Logarithmus auf $G$ genau dann, wenn ein Zweig der Argumentfunktion auf $G$ existiert.
Dies einzusehen ist nicht schwierig. Ist $\varphi$ ein Zweig der Argumentfunktion auf $G$, so ist $f$ definiert durch $f(z) = \log|z| + i\varphi(z)$ stetig auf $G$, also ein Zweig des Logarithmus auf $G$. Ist umgekehrt $f$ ein Zweig des Logarithmus auf $G$, so gilt $z = e^{f(z)} = e^{\operatorname{Re} f(z)} e^{i \operatorname{Im} f(z)}$ und somit $|z| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$. Daher ist $z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$ ein Zweig der Argumentfunktion, da $f$ stetig ist.

**4.4 Satz.** *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ gelten die folgenden Aussagen:*
*a) Existiert ein Zweig $f$ des Logarithmus auf $G$, so ist $f$ holomorph und es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in G$.*
*b) Auf $G$ existiert genau dann ein Zweig des Logarithmus, wenn die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf $G$ besitzt.*

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

**4.5 Bemerkungen.** Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet.
a) Alle Zweige des Logarithmus auf $G$ sind durch

$$f(z) = \int_\gamma \frac{1}{\xi} d\xi + \log a$$

gegeben, wobei $a \in G$ gilt und $\gamma$ einen $a$ und $z$ verbindenden Integrationsweg bezeichnet.
b) Auf $\mathbb{C}^*$ existiert *kein* Zweig des Logarithmus.

Wäre diese Behauptung falsch, so würde nach Satz 4.4 die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion besitzen. Also würde $\int_{\partial K_r(0)} \frac{1}{z} dz = 0$ für einen Kreis $K_r(0)$ gelten, im Widerspruch dazu, dass $\int_{\partial K_r(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ gilt.
c) Es sei $G := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$, die sogenannte längs der negativen reellen Achse „*geschlitzte Ebene*“. Der durch

$$\log z := \int_{[1,z]} \frac{1}{\xi} d\xi$$

definierte Zweig des Logarithmus ist insofern ausgezeichnet, da seine Beschränkung auf die positive reelle Achse mit der Logarithmusfunktion der reellen Analysis übereinstimmt. Dieser Zweig wird auch als *Hauptzweig des Logarithmus* bezeichnet.

In der Analysis I definierten wir für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ die Potenz $a^b$ durch $a^b := e^{b \log a}$. Wir übertragen diese Definition ins Komplexe.

**4.6 Definition.** Ist $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ und $\log a$ ein Logarithmus von $a$, so heißt

$$a^b := e^{b \log a}$$

ein Wert der *b-ten Potenz von a.*

**4.7 Bemerkungen.**
a) Bei der Schreibweise $a^b$ kommt die Abhängigkeit von der Wahl von $\log a$ nicht zum Ausdruck. Je zwei Werte von $a^b$ unterscheiden sich jedoch um einen Faktor der Form $e^{2\pi i k b}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
b) Ist $b$ irrational, so erhalten wir also unendlich viele Werte von $a^b$. Ist hingegen $b \in \mathbb{Z}$, so besitzt $a^b$ nur einen Wert, da in diesem Fall $e^{2\pi i k b} = 1$ gilt.
c) Ist $b = \frac{1}{n}$ für $n = 2, 3, \ldots$, so gilt $e^{2\pi i \frac{k}{n}} = e^{2\pi i \frac{k'}{n}}$ genau dann, wenn $k - k'$ ein Vielfaches von $n$ ist. Daher nimmt $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ genau $n$ Werte an. Diese sind durch

$$z_n^1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad z_n^2 = e^{\frac{4\pi i}{n}}, \quad \ldots, \quad z_n^n = e^{\frac{2n\pi i}{n}} = 1,$$

gegeben.
d) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}^*$ nimmt $a^{\frac{1}{n}}$ also genau die n Werte

$$1 e^{\frac{1}{n} \log a}, \quad e^{\frac{2\pi i}{n}} e^{\frac{1}{n} \log a}, \quad \ldots, \quad e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} e^{\frac{1}{n} \log a}$$

an.
e) Gilt $a = 1$ und $b = \frac{1}{n}$, so heißen $a^b$ die *n-ten Einheitswurzeln.*