Skriptum zur Vorlesung

Analysis III: Funktionentheorie

Wintersemester 2008/09

Matthias Hieber
Fachbereich Mathematik
TU Darmstadt

I Komplexwertige Funktionen

Historisch gesehen führte das Studium algebraischer Gleichungen zur Erweiterung des reellen Zahlenkörpers $\mathbb{R}$ zum Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Elementare Eigenschaften komplexer Zahlen sowie Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, haben wir bereits in Analysis I behandelt.

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemeiner Funktionen einer komplexen Variablen und beschäftigen uns insbesondere mit dem Begriff der komplexen Differenzierbarkeit oder mit anderen Worten ausgedrückt, mit holomorphen Funktionen.

1 Komplexe Differenzierbarkeit

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer Erinnerung an die *komplexen Zahlen*, welche wir schon in Analysis I eingeführt hatten. Dort hatten wir gesehen, dass eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ als $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ geschrieben werden kann. Hierbei waren $\operatorname{Re} z$ der *Realteil*, $\operatorname{Im} z$ der *Imaginärteil* einer komplexen Zahl z und i die *imaginäre Einheit* definiert als die Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Ferner definierten wir $\overline{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$.
Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gelten dann die folgenden Beziehungen:

- $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $z = 0 \;\Leftrightarrow\; |z| = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re} z = 0 = \operatorname{Im} z$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$

Die folgende Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist von grundlegender Bedeutung.

1.1 Definition. (Komplexe Differenzierbarkeit).
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f *komplex differenzierbar* (oder auch $\mathbb{C}$-differenzierbar) in $a \in D$, falls für alle Folgen $(z_n) \subset D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a}$$

existiert. In diesem Fall heißt

$$f'(a) := \frac{\partial f}{\partial z}(a) := \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a}$$

die *Ableitung* von f in a.

Die komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion lässt sich leicht, wie im folgenden Lemma dargelegt, charakterisieren.

1.2 Lemma. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) f ist komplex differenzierbar in a.

b) Es existiert eine in a stetige Funktion $\Delta : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + \Delta(z)(z - a), \quad z \in D.$$

Beweis. $a) \Rightarrow b)$: Setzen wir

$$\Delta(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z \neq a, \\ f'(a), & z = a, \end{cases}$$

so ist Δ wohldefiniert und stetig in a. Der Beweis der umgekehrten Richtung verläuft analog.

□

1.3 Beispiele. a) Ist $D = \mathbb{C}$ und $f = \mathrm{id}$, so ist f komplex differenzierbar.
b) Die Funktion $f : C \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ ist in jedem $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn es gilt für jede Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}\setminus\{a\}$ mit $z_n \to a$

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n^2 - a^2}{z_n - a} = \lim_{n\to\infty} (z_n + a) = 2a.$$

Also ist $f'(z) = 2z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
c) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist in *keinem* Punkt $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Um dies einzusehen, wählen wir für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \frac{\overline{a} + \frac{1}{n} - \overline{a}}{\frac{1}{n}} = 1;$$

wählen wir hingegen $z_n = a + i\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \frac{\overline{a} - i\frac{1}{n} - \overline{a}}{i\frac{1}{n}} = -1.$$

Da $a \in \mathbb{C}$ beliebig war, ist nach Definition f an keiner Stelle komplex differenzierbar.

1.4 Lemma. (Rechenregeln). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in \mathbb{C}$ und $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ komplex differenzierbare Funktionen. Dann gilt:*

a) $(f + g)$ ist komplex differenzierbar in a und es gilt $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

b) cf ist komplex differenzierbar in a und es gilt $(cf)'(a) = cf'(a)$.

c) (fg) ist komplex differenzierbar in a und es gilt $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

d) Gilt $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in a komplex differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

e) Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f(D) \subset U$ und $h : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $b = f(a)$, so ist die Komposition $h \circ f : D \to \mathbb{C}$ in a komplex differenzierbar und es gilt

$$(h \circ f)'(a) = h'(b)f'(a).$$

Der Beweis verläuft analog zur reellen Situation in Analysis I und wird dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Die folgende Definition ist von zentraler Bedeutung für die gesamte Vorlesung.

1.5 Definition. (Holomorphe Funktionen).
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph* auf D, falls f in jedem Punkt $a \in D$ komplex differenzierbar ist. Die Menge aller holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ wird mit $\mathcal{H}(D)$ bezeichnet, d.h. es gilt $\mathcal{H}(D) := \{f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$.

1.6 Beispiele. a) Jedes Polynom p, d.h. jede Funktion der Form $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit

$$p'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}.$$

b) Die komplexe exp-Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und es gilt

$$\exp'(a) = \exp(a), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Um dies zu beweisen, sei $(z_n) \subset \mathbb{C}\backslash\{a\}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_n} - e^a}{z_n - a} &= e^a \frac{e^{z_n - a} - 1}{z_n - a} = e^a \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(z_n - a)^{j-1} \\ &= e^a \left(1 + (z_n - a) \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(z_n - a)^{j-2}}{j!}\right) \overset{n\to\infty}{\to} e^a, \end{aligned}$$

da $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{(z_n-a)^{j-2}}{j!} < \infty$, falls $|z_n - a| < 1$ gilt. Daher ist die exp-Funktion komplex differenzierbar und es gilt $\exp'(a) = e^a$ für alle $a \in \mathbb{C}$.

2 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche wir in Termen ihres Real- bzw. Imaginärteil als

$$f = u + iv$$

ausdrücken. Es ist nun ganz natürlich zu fragen, was die Bedingung der komplexen Differenzierbarkeit für die Terme u und v bedeutet? Hierzu erinnern wir zunächst an den Begriff der reellen Differenzierbarkeit einer Funktion g aus der Analysis II. Eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ heißt *reell differenzierbar in* $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, falls in z_0 stetige Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : D \to \mathbb{R}$ existieren, für welche

$$g(z) = g(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z), \quad z \in D$$

gilt. Die Werte $\Delta_1(z_0) := g_x(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0)$ und $\Delta_2(z_0) := g_y(z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(z_0)$ heißen *partielle Ableitungen* von g nach x bzw. y im Punkte z_0.
Eine komplexwertige Funktion $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ heißt reell differenzierbar, wenn dies für u und v gilt. Überträgt man die Definition der reellen Differenzierbarkeit auf eine komplexwertige Funktion f so erhalten wir die folgende Definition.

2.1 Definition. (Reelle Differenzierbarkeit). Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *reell differenzierbar in* $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, falls in z_0 stetige Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : D \to \mathbb{C}$ existieren, für welche

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z), \quad z \in D,$$

gilt. Die Werte $\Delta_1(z_0) := f_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ und $\Delta_2(z_0) := f_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ heißen *partielle Ableitungen* von f nach x bzw. y. Wir setzen ferner:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := f_z(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) := f_{\bar{z}}(z_0) := \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)).$$

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit.

2.2 Satz. Für eine Funktion $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) f ist komplex differenzierbar in z_0.

b) f ist reell differenzierbar und es gilt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

c) f ist reell differenzierbar und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

d) u, v sind reell differenzierbar und es gelten die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ u_y(z_0) &= -v_x(z_0). \end{aligned}$$

Beweis. b) $\Leftrightarrow$ c): klar nach Definition
a) $\Rightarrow$ c): Nach Voraussetzung ist f komplex differenzierbar, d.h. es gilt

$$f(x) = f(z_0) + \Delta(z_0)(z - z_0) = f(z_0) + \Delta(z)(x - x_0) + i\Delta(z)(y - y_0)$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Daher ist f reell differenzierbar und es gilt $f_x(z_0) = \Delta(z_0)$ sowie $f_y(z_0) = i\Delta(z_0)$. Somit folgt $f_x(z_0) = -if_y(z_0)$.
c) $\Leftrightarrow$ d): Es sei $f_x = u_x + iv_x$ und $f_y = u_y + iv_y$. Die Voraussetzung $f_x = -if_y$ impliziert, dass $u_x + iv_x = v_y - iu_y$ und somit $u_x = v_y$ bzw. $u_y = -v_x$ gilt. Die umgekehrte Implikation beweist man analog.
b) $\Rightarrow$ a): Nach Voraussetzung ist f reell differenzierbar, d.h. es gilt

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)(x - x_0) + \Delta_2(z)(y - y_0)$$

für in z stetige Funktionen Δ_1 und Δ_2 mit $\Delta_1(z_0) + i\Delta_2(z_0) = 0$. Schreibt man $x - x_0 = \frac{1}{2}(z - z_0 + \bar{z} - \bar{z}_0)$ sowie $y - y_0 = -\frac{i}{2}(z - z_0 + \bar{z} - \bar{z}_0)$, so ergibt sich

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) - i\Delta_2(z)) + (\bar{z} - \bar{z}_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) + i\Delta_2(z)).$$

Definiert man weiter

$$g(z) := \begin{cases} \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\frac{1}{2}(\Delta_1(z) + i\Delta_2(z)) & , z \neq z_0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist g stetig in z_0, da $|\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}| = 1$ und $\Delta_1(z_0) + i\Delta_2(z_0) = 0$ nach Voraussetzung. Schließlich setzen wir

$$\Delta(z) := \frac{1}{2}(\Delta_1(z) - i\Delta_2(z)) + g(z),$$

und sehen, dass Δ in z_0 stetig ist und dass

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$$

gilt.

$\square$