# 7. Übung

*Lösungsvorschlag*

1. siehe Gruppenübung

2. a) ist klar.

b) Sei $p$ eine Primzahl, die die Ordnung $|U \cap V|$ teilt. Nach Vorraussetzung ist $\{0\} = \mathrm{Soc}\,(U) \cap \mathrm{Soc}\,(V) = \{a \in U \cap V \mid \exists$ quadratfreies $m \neq 0$ mit $ma = 0\}$; da $m = p_1 \cdots p_n$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen ist mit dem Satz von Cauchy auch

$$\{0\} = \mathrm{Soc}\,(U) \cap \mathrm{Soc}\,(V) = \{a \in U \cap V \mid \exists \text{ Primzahl } p \text{ mit } pa = 0\}.$$

Damit folgt: Kein Element in $U \cap V$ hat Primzahlordnung. Mit dem Satz von Cauchy ist eine solche endliche Gruppe also trivial.

c) Seien $a \in \mathrm{Soc}\,(A)$, $|a| = m$ und $m = p_1 \cdots p_n$. Sind zwei $p_i$ gleich, so ist $a$ nicht nicht in $\mathrm{Soc}\,(A)$. Also sind die $p_i$ p.w. verschieden. Mit dem Chinesischen Restsatz ist $a = a_1 + \cdots + a_n$ für $a_i \in A$ mit $|a_i| = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. (Konkret: $a_i = p_1 \cdots \hat{p_i} \cdots p_n a$).

d) Sei $|A| = p^k$, o.B.d.A. $k > 0$. Wir betrachten $\pi : A \to pA = \{pa \mid a \in A\}$. $\ker \pi$ besteht offensichtlich aus genau den Elementen, die zyklisch der Ordung $p$ sind, womit nach c) $\ker \pi = \mathrm{soc}\,(A)$. Da alles abelsch ist, ist $\ker \pi \cong A/pA$. Mit dem Klassifikationssatz für endliche abelsche Gruppen finden wir

$$A \cong \mathbb{Z}_{p^{f_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{f_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{f_n}} \text{ wobei } f_1 + \cdots + f_n = k,\ f_i > 0.$$

Wegen $\mathbb{Z}_{p^f}/p\mathbb{Z}_{p^f} = \left(\mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z}\right) / \left(p\mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (2. Isomomorphiesatz) ist $\mathrm{Soc}\,(A) \cong A/pA \cong \mathbb{Z}_{p^{f_1}}/p\mathbb{Z}_{p^{f_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{f_2}}/p\mathbb{Z}_{p^{f_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{f_n}}/p\mathbb{Z}_{p^{f_n}} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \cong (\mathbb{F}_p)^n$.
*Alternative Argumentation:* Nach c) ist $\mathrm{Soc}\,(A)$ direkte Summe zyklischer Untergruppen. Da nur Elemente von Primzahlordung vorkommen ist

$$\mathrm{Soc}\,(A) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p^n \text{ für ein } n > 0.$$

e) Sei $B = \mathbb{Z}_{p^k} \subset A$, $(k > 1)$, eine maximale zyklische Untergruppe. Wir betrachten $\pi_i : p^{i-1}B \to p^i B$, $(i = 1, \ldots, k)$: Da jeweils nichttriviale Cauchy-Elemente existieren, haben alle $\pi_i$ einen nichttrivialen Kern. Suksessive können wir so eine Reihe von Untergruppen

$$B \supsetneq pB \supsetneq p^2 B \supsetneq \cdots \supsetneq p^k B \cong \{0\} \text{ für ein } n > 0$$

mit kanonischen Projektionen bilden. Da alles abelsch ist, sind alle $\ker \pi_i \cong p^{i-1}B/p^i B \subsetneq B$ und $p^i B$ auch Normalteiler. Durch suksessive Zerlegung erhalten wir

$$B = B/pB + pB/p^2B + \cdots + p^{k-1}B/p^k B.$$

Das kann keine direkte Summe sein, wie uns der chinesische Restsatz lehrt. Jedoch hat jedes $b \in B$ eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$b = b_1 + pb_2 + \cdots + p^{k-1}b_k \text{ mit } b_i \in \{0, \ldots, p-1\}\,.$$

Damit ist $B$ zwar ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum, jedoch kein freier $\mathbb{F}_p$-Modul, denn $p\,(b_1, \ldots, b_k) = (0, b_1, \ldots, b_{k-1})$. Wie zu erwarten war, ist $B$ ein zyklischer $\mathbb{F}_p$-Modul. Dieser hat als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum eine Basis $\{e_1, \phi e_1, \ldots, \phi^{k-1} e_1\}$ für einen Endomorphismus $\phi \in \operatorname{End}\left(\mathbb{F}_p^k\right)$. Diesem entspricht die Begleitmatrix

$$A_{k\times k} = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

welche wiederum der Relation $p^k e_1 = 0$ entspricht (Thm 4.2.6, alg2.pdf).

3. a)

| $P$ | $A$ | $Q$ |
|---|---|---|
| $E_{3\times 3}$ | $\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{matrix}$ | $E_{4\times 4}$ |

$\rightsquigarrow$

| $P$ | $A$ | $Q$ |
|---|---|---|
| $E_{3\times 3}$ | $\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{matrix}$ |

$\rightsquigarrow$

| $P$ | $A$ | $Q$ |
|---|---|---|
| $E_{3\times 3}$ | $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1 & & & -1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ -2 & & 1 & -1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}$ |

$\rightsquigarrow$

| $P$ | $A$ | $Q$ |
|---|---|---|
| $\begin{matrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -3 & 3 & 1 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1 & & & -1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ -2 & & 1 & -1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}$ |

$\rightsquigarrow$

| $P$ | $A$ | $Q$ |
|---|---|---|
| $\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -3 & 3 & 1 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ |

$\rightsquigarrow$

| $P$ | $D$ | $Q$ |
|---|---|---|
| $\begin{matrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -3 & 3 & 1 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ |

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$

4. " $\Rightarrow$ " trivial

" $\Leftarrow$ " Sei $A \supseteq D$ und alle $U \subseteq A$, die $B$ und $C$ enthalten, enthalten auch $D$. Angenommen $D \supsetneq B + C$. Sei $U \subseteq A$ eine minimale Untergruppe, die $B$ und $C$ enthält. Diese existiert nach dem Lemma von Zorn (auch für unendliche abelsche Gruppen). Dann ist $U \supseteq D \supsetneq B + C$. Widerspruch.

5. a) Isomorphiesatz $\Rightarrow A/\ker(\phi) \cong B$. Definiere Abbildung von $M_{A/\ker(\phi)} = \{\text{Untergruppen von } A/\ker(\phi)\}$ nach $M_B = \{\text{Untergruppen von } B\}$ vermöge $\overline{\alpha} : U + \ker(\phi) \mapsto \phi(U)$. Injektivität: Falls $U_1 - U_2 \subset \ker(\phi)$, dann Bild 0. Surjektivität: $\phi$ ist surjektiv, also auch surjektiv auch die Erzeuger von $B$. Wir erhalten $\alpha$, wenn wir bemerken, dass $U + \ker(\phi)$

nichttrivial $\Leftrightarrow U \supsetneq \ker(\phi)$.

$$\alpha^{-1}(V) = \phi^{-1}(V) = \{x \in A \mid \phi(x) \in V\}$$

b) $U_1 \subseteq U_2 \Leftrightarrow U_1 + \ker\phi \subseteq U_2 + \ker\phi$. Seien $U_1 = \mathrm{span}_{i \in I}\{a_i\}$ und $U_2 = \mathrm{span}_{i \in I}\{b_i\}$ für minimale Erzeugendensysteme. $\phi$ vermittelt Bijektionen für diese.

6. auf .../~herrmann/alg/jordan.pdf