# Einführung in die Algebra

# 6. Übung

**Lösungsvorschlag**

## Gruppenübung

### G 18 (Invariante Untergruppen)

Sei eine Wirkung $(g, x) \mapsto gx$ der Gruppe $G$ auf einer Menge $M$ gegeben und $X \subseteq M$. Wir definieren $gX = \{gx \mid x \in X\}$. Zeigen Sie

$$H = \{g \in G \mid X = gX\} \text{ ist eine Untergruppe von } G$$

*$e \in H$ ist eh klar. Seien $g, h \in H$, Dann $(gh)X = \{(gh)x \mid x \in X\} = \{g(hx) \mid x \in X\} = \{gy \mid y \in X\} = X$ und $g^{-1}X = g^{-1}(gX) = \{g^{-1}(gx) \mid x \in X\} = \{(g^{-1}g)x \mid x \in X\} = \{ex \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.*

### G 19 (Oktagon)

$D_8$ bezeichne die Gruppe aller Symmetrien des regelmäßigen Achtecks.

1. Bestimme die Ordung von $D_8$.
2. Zeige, dass $D_8 = \text{Span}\{d, s\}$ für eine passende Drehung $d$ und Spiegelung $s$.
3. Verifiziere:

   $$d^8 = e = s^2, \; sd^k = d^{-k}s \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

   Es gibt also eine eindeutige Darstellung der Elemente von $D_8$ der Form $d^k s^\ell$ mit $0 \leq k \leq 7$ und $\ell = 0, 1$.
4. Zeige, dass $d^k$ und $d^\ell$ genau dann konjugiert sind, wenn $d^\ell = d^{\pm k}$ und dass $d^k s$ und $d^\ell s$ genau dann konjugiert sind, wenn $k \equiv \ell (\text{mod} 2)$
5. Beschreibe die Konjugiertenklassen $K_1, \dots, K_r$ von $D_8$ geometrisch und durch die Zykelstruktur bei der Wirkung auf den 8 Ecken - nummerieren Sie diese fortlaufend. Geben Sie für jede Konjugiertenklasse die Ordnung ihrer Elemente und die Elementanzahl an.
6. Gib die Normalteiler von $D_8$ als Vereinigungen von Konjugiertenklassen an.
7. Für welche $k$ gilt $D_8 = \text{Span}\{d^k, s\}$?
8. Wir betrachten Färbungen der Ecken des Achtecks mit 2 Farben. Die Anzahl der Bahnen äquivalenter Färbungen unter der Gruppe $D_8$ ist zu bestimmen.

1. *Bahnformel für Ecken: $|G_x| = 2$, $|G(x)| = 8$, $|G| = 16$,*
2. *$d = 45^o$-Drehung, $s$ beliebige Spiegelung. z.B. an Achse durch $1, 5$. Dann ist $ds$ Spiegelung an um $22,5^o$ gedrehter Achse. $\mathsf{ord}(d) = 8$, $s \notin \text{Span}\{d\}$, also $8 < |\mathsf{Spann}\{d, s\}|$ teilt $16$, also $\mathsf{Spann}\{d, s\} = D_8$*
3. *$d^8 = e$ gilt wegen 8-Eck, die anderen Beziehungen wegen G3. Damit kann man jedes Element in der angegeben Form darstellen. Da es nur 16 solche Ausdrücke gibt, muss die Darstellung eindeutig sein. Oder andersherum: $\{d^0, \dots, d^7\}$ ist 8-elementig weil $d$ Ordnung 8 hat. $g \mapsto gs$ ist injektiv, also hat man die 8-elementige, dazu disjunkte Teilmenge $d^0 s, \dots, d^7 s$. Also ingesamt 16 und damit wegen $|D_8| = 16$ Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung.*

4. $d^k$ und $d^l$ sind konjungiert genau dann, wenn $d^kd^m = d^md^l$ oder $d^kd^ms = d^msd^l = d^md^{-l}s$ für ein $m$ und das bedeutet $d^k = d^{\pm l}$. Andererseits $d^ks$ konjugiert zu $d^ls$ genau dann wenn $d^kd^{-m}s = d^ksd^m = d^md^ls$ oder $d^kd^{-m} = d^ksd^ms = d^msd^ls = d^md^{-l}$ und das bedeutet $k - l = 2m$.

5. Klasse, geom.Beschr, Zykelstruktur, Ordnung, Anz.
   (a) $K_1 = \{e\}$, Identität, $(1)$ 1, 1
   (b) $K_2 = \{d^4\}$, $180^o$-Drehung, $(1\,5)(2\,6)(3\,7)(4\,8)$, 2, 1
   (c) $K_3 = \{d^2, d^6\}$, $\pm 90^o$-Drehung. $(1\,3\,5\,7)(2\,4\,6\,8)$, $(1\,7\,5\,3)(2\,8\,6\,4)$, 4, 2
   (d) $K_4 = \{d, d^7\}$, $\pm 45^o$-Drehung, $(1\,2\,3\,4\,5\,5\,7\,8)$ und $(1\,8\;7\,6\,5\,4\,3\,2)$, 8, 2
   (e) $K_5 = \{d^3, d^5\}$, $\pm 135^o$-Drehung, $(1\,4\,7\,2\,5\,8\,3\,6)$ und $(1\,6\;3\,8\,5\,2\,7\,4)$, 8, 2
   (f) $K_6 = \{s, d^2s, d^4s, d^6s\}$, Spiegelungen an Achsen durch Ecken, $(2\,8)(3\,7)(4\,6)$ usw., 2, 4
   (g) $K_7 = \{ds, d^3s, d^5s, d^7s\}$, Spiegelungen an Achsen durch Kantenmittelpukte, $(1\,2)(3\,8)(4\,7)(5\,6)$ usw., 2, 4

6. $N$ Normalteiler genau dann, wenn $N$ Untergruppe und Vereinigungen von Konjugiertenklassen. Nach Lagrange $|N|$ Teiler von 16. Ist $N$ nichttrivial, so $K_2 \subseteq N$ weil $K_1 \subseteq N$ und $|N|$ gerade. $K_1 \cup K_2$ ist Normalteiler. Grösseres $N$ muss als Untergruppe $d^2$ und damit $K_3$ enthalten. $M = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ ist in der Tat Normalteiler. Kommt ein Element von $K_4 \cup K_5$ hinzu, so ist die erzeugte Untergruppe $M \cup K_4 \cup K_5$ und das ist Normalteiler. Es bleiben $M \cup K_6$ und $M \cup K_7$ und das sind ebenfalls Normalteiler.

7. Sei $U_k = \mathsf{Spann}\{d^k\}$. $|U_k| = 8$ für $k = 1, 3, 5, 7$ und $U_k \cap \{e, s\} = \{e\}$ also hat $\mathsf{Spann}\{d^k, s\}$ mindesten 16 Elemente und damit $= D_8$. Andernfalls liegen $d^k$ und $s$ in einem der echten Normalteiler.

8. Für die Wirkung von $D_8$ auf der Menge der Färbungen haben wir

$$|\mathsf{Fix}(g)| = 2^{r_g}$$

woebi $r_g$ die Anzahl dr Bahnen unter der Wirkung von $\mathsf{Spann}(g)$ auf den Ecken ist. $r_g$ ist auf jeder Konjugiertenklasse konstant, hier die Anzahl der Zykeln. Burnside ergibt für die Anzahl der Bahnen auf der Menge der Färbungen

$$\frac{1}{16}(1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^4) = 30$$

## Hausübung

### H 18 (Sylowsätze)

Bestimmen Sie die Sylowuntergruppen von $S_5$.

$|S_5| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. *Also gibt es 2-, 3- und 5-Sylowu.-g'n.. Die 3- und 5-Sylowu.-g'n sind zyklisch.*

*Die Anzahl der p-Sylowu.-g'n ist 1 modulo p (Dritter Sylowsatz) und teilt die Ordung von* $S_5$ *(Bahnformel), also*

- *p=5: 1,6*
- *p=3: 1,4,10*
- *p=2: 1,3,5,15*

*Wir wissen, dass* $S_5$ *einen Normalteiler vom Index 2 hat, und dass dieser einfach ist.* $|A_5| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. *Da darin auch die 3- und 5-Sylowu.-g'n von* $S_5$ *liegen, kommt jeweils die 1 nicht in Frage, da diese sonst einen Normalteiler wären (erster Sylowsatz), was im Widerspruch zur Einfachheit von* $A_5$ *steht. Damit gibt es 6 5-Sylowg'n.*

*Ordnung 3 haben genau die 3-Zykeln. Es gibt mindesten 5 Möglichkeiten 3 Elemente aus 5 auszuwählen, also mindestens 5 3-Syl.g'n. Damit gibt es 10 3-Sylowg'n.*

*Alternative Argumentation*

*24 Elemente der Ord'g 5, mit 4 Erzeugern in jeder dieser, also 6 5-Sylowu.-g'n.*

*20 Elemente der Ord'g 3, mit 2 Erzeugern in jeder dieser, also 10 3-Sylowu.-g'n.*

*Die Sylowuntergruppe der Ord'g 8:*

*Der Stabilisator eines Punktes in* $S_5$ *ist* $S_4$. *Davon gibt es 5. Die Symmetriegruppe des Quadrates (Diedergruppe)* $D_4$ *ist der Ord'g 8. Es gibt drei Möglichkeit aus 4 Punkten ein Quadrat zu legen. Also gibt es 15 dieser 2-Sylowg'n.*

### H 19 (Wirkung und Kongruenz)

(a) Zeige, dass durch

$$(A, S) \mapsto SAS^t$$

eine Wirkung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ auf den symmetrischen Matrizen $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben ist.

(b) Es sind die Bahnen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu beschreiben (Repräsentantensystem angeben).

*a)* $EAE^t = EAE = A$ *und*

$$U(SAS^t)U^t = (US)A(S^tU^t) = (US)A(US)^t$$

*b) Das ist im wesentlichen die Aussage des Satzes von Sylvester:*

*Mit den Elementarmatrizen des Gauß-Algorithmus lassen sich mittels o.g. Abbildung aus einer elementarsymmetrischen Matrix* $aE_{ij} + aE_{ji}$ *beliebige symmetrische Matrizen der Determinante Null erzeugen (Ringstuktur auf* $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$*).*

*Wir wählen die Transformationen* $(Id-(2a)^{-\frac{1}{2}}E_{ij}+(2a)^{-\frac{1}{2}}E_{ji})(aE_{ij}+aE_{ji})(Id+(2a)^{-\frac{1}{2}}E_{ij}-(2a)^{-\frac{1}{2}}E_{ji}) = -E_{ii}+E_{jj}$. *und* $(Id-E_{11}-E_{ii}+E_{1i}+E_{i1})E_{ii}(Id-E_{11}-E_{ii}+E_{1i}+E_{i1}) = E_{11}$, *um die Normalform* $-E_{11} + E_{22}$ *zu erhalten, also jede symmetrische Matrix auf Diagonalgestalt mit Einträgen* $\pm 1$ *zu erhalten.*

*Außerdem sind* $\mathrm{Sym}_-(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{K}) \mid \det A < 0\}$ *und* $\mathrm{Sym}_+(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{K}) \mid \det A > 0\}$ *disjunkte Bahnen, da* $\det(SAS^t) = det(S)^2 \det(A)$ *ist.*

*Die Determinante jeder Hauptuntermatrix bleibt dabei erhalten, wie man sich leicht überlegt, womit die Anzahl der +1 sowie der -1 fixiert bleibt. (Induktion über den Rang der Hauptuntermatrix )*

**H 20 (Invariante Teilmengen)**

Sei eine Wirkung $(g,x) \mapsto gx$ der Gruppe $G$ auf einer Menge $M$ gegeben und $X \subseteq M$.

1. Gilt $gx \in X$ für alle $x \in G$, so wir auf $G$ eine Kongruenzrelation bestimmt durch

$$g \cong h \Leftrightarrow gx = hx \text{ für alle } x \in X$$

2. Beschreibe den zugehörigen Normalteiler.

1. *Sei* $\rho(g)$ *die durch* $\rho(g)(x) = gx$ $(x \in X)$ *definierte Abbildung von* $G$ *in* $X^X$. *Es gilt*

$$g \sim h \iff \rho(g) = \rho(h)$$

*d.h. man hat die Kernäquivalenz der Abbildung* $\rho$. $\rho$ *is sogar ein Homomorphismus von* $G$ *in das Monoind* $X^X$

$$\rho(hg)(x) = (hg)x = h(gx) = \rho(h)(\rho(g)(x)) = (\rho(h) \circ \rho(g)(x)$$

*also* $\rho(hg) = \rho(h) \circ \rho(g)$. *Daher ist* $\sim$ *mit der Multiplikation verträglich und somit Kongruenz von* $G$.

2. $\bigcap_{x \in X} Stab_x(G)$

**Es besteht die Möglichkeit, die Hausübungen** am 6./7./13./14. Juli 2010 in der Übung vorzurechnen.