Einführung in die Algebra
5. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 17 (Chinesischer Restsatz)

1. Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung 32 (bis auf Isomorphie).
2. Geben Sie bis auf Isomorphie die Untergruppen von $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{125} \times \mathbb{Z}_{243}$ an. Welche sind zyklisch. Geben Sie typische Isomorphismen für p-Untergruppen in Form von Beispielen an?
3. Bestimme die Erzeuger von $\mathbb{Z}_{21}$.
4. Geben Sie die inneren und äußeren Produktzerlegungen von $\mathbb{Z}_{1001} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13}$ an. Welche Unter- bzw. Faktorgruppen sind isomorph.

1. *$32 = 2^5$: Partitionen der 5: $\phi(5) = 7$*
2. *Wenn man den Klassifikationssatz für die endlichen abelschen Gruppen kennt, kann man folgende Untergruppen leicht ablesen: $\mathbb{Z}_{5^k} \times \mathbb{Z}_{3^l} \times \mathbb{Z}_{5^m} \times \mathbb{Z}_{3^n}$ sind Untergruppen für $(k, l, m, n) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, \ldots, 5\}$ wobei mit $\mathbb{Z}_1 = \{1\}$ die triviale Gruppe gemeint sei. Also ist z.B. $\mathbb{Z}_5 \times 1 \times 1 \times 1 \cong 1 \times 1 \times \mathbb{Z}_5 \times 1$. Das ist auch ein Beispiel für eine zyklische Untergruppe. Die Aussage des chinesischen Restsatzes ist: Eine Untergruppe ist genau dann nicht zyklisch, wenn primteilerfremde Untergruppen im Produkt vorkommen. Damit folgen auch Isomorphismen der Art*

   $$\mathrm{Spann}(\bar{1}, \tilde{1}) \cong \mathrm{Spann}(\bar{0}, \tilde{1}) \cong \mathbb{Z}_{25} \quad \text{für } (\bar{1}, \tilde{1}) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{25}.$$

   Kennt man den Klassifikationssatz nicht, dann folgern wir mit ersten Satz von Sylow, dass 3-Untergruppen der Ordungen $3, 3^2, \ldots, 3^6$ existieren. (5-Untergruppen analog)

   Dann müssen wir uns bloß noch überlegen, warum $\mathbb{Z}_{3^6}$ oder auch $\mathbb{Z}_{5^{25}}$ z.B. keine Untergruppen sein können: Mit dem zweiten Satz von Sylow wären z.B. $\mathbb{Z}_{3^6}$ und $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{3^5}$ konjugiert zueinander, was nicht sein kann da die Gruppen abelsch und nicht-isomorph (Erzeuger anschauen!) sind. Auch in $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{125}$ gibt es offensichtlich kein Element der Ordung 525.
3. *2,4,5,8,10,11,13,14,16,17,19,20,*
4. *$\mathbb{Z}_{1001} = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13}$ und der Rest der Debatte wie bei 2.*

Hausübung

H 16 (Gruppen der Ordung 8)

Klassifizieren Sie die Gruppen der Ordnung 8 (bis auf Isomorphie) und identifizieren Sie diese mit bekannten Gruppen.

Hinweis: (i) Bestimmen Sie zunächst semidirekte Produkte. (ii) Der Fixpunktsatz gibt Ihnen die möglichen Anzahlen der Normalteiler.

Semidirekte Produkte: Das Problem reduziert sich auf die Klassifikation der Homomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_4)$. Nun ist $Aut(\mathbb{Z}_4) = \{id, \eta\}$ mit $\eta(x) = x^{-1}$. Daher existiert nur ein nichtabelsches semidirektes Produkt $\mathbb{Z}_2 \times_\alpha \mathbb{Z}_4)$. Es ist isomorph zur Diedergruppe D_4.

Sei N eine Untergruppe der Ordung 4 - und damit ein Normalteiler. Sei gN ein Erzeuger von G/N, jedoch dieses Mal so, dass $|\langle g \rangle| = 4$ ist, also g wieder einen Normalteiler in G erzeugt.

Nun operiere G auf der Menge der 4-elementigen Untegruppen von G durch Konjugation (das sind mit dem Chinesischen Restsatz 3). Dann ist mit dem Fixpunktsatz die Anzahl der Normalteiler kongruent 3 modulo 2. Also gibt es in diesem Fall genau drei Normalteiler. Alle Normalteiler schneiden sich nichttrivial. Das trifft auf die Normalteiler der Quaternionengruppe zu, womit wir die Isomorphie sehen.

H 17 (Gruppen der Ordnung 147) Klassifizieren Sie die Gruppen mit 147 Elementen.

Sei G eine Gruppe der Ordnung 147. Die Zerlegung in abelsche Gruppen $C_3 \times C_7 \times C_7$ und $C_3 \times C_{49}$ ist klar.

- $147 = 7 \cdot 21$

  Die Ordnung Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ wird von 21-1=20 geteilt. Jedoch ist 7 kein Teiler von 20. Also gibt es nur $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

  Einzige nichtabelsche Untergruppe der Ordnung 21 ist die $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times_\alpha \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ für $\alpha(z) = 2 \cdot z$ (isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times_\beta \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ für $\beta(z) = 4 \cdot z$, da diese die gleiche Untergruppe erzeugen).

- $147 = 3 \cdot 49$

  Jede Gruppe der Ordnung 49 ist eine 7-Sylow-Gruppe von G. Gemäß dem zweiten Satz von Sylow sind alle Untergruppen der Ordung 49 konjugiert zueinander. Da jedoch die Gruppen $\mathbb{Z}_{49}$ und $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ mit dem Chinesischen Restsatz nicht isomorph zueinander sein können, ist jede ein Normalteiler in nichtisomorphen Gruppen $\mathbb{Z}_3 \times_\alpha \mathbb{Z}_{49}$ und $\mathbb{Z}_3 \times_\beta (\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7)$.

  Für letztere ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_7)$ zu untersuchen, insbesondere Untergruppen der Ordnung 3. Hat man eine Matrix mit $A^3 = E$, so muss nach Cayley-Hamitlon das Minimalpolynom $X^3 - 1$ teilen - man sieht aber leicht, dass $X^3 - 1 \equiv (X-1)(X-2)(X-4) \pmod 7$. Also ist A ähnlich zu einer Jordan-Normalform $\begin{pmatrix} \lambda_i & a \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$, $a = 0, 1$. Aus denen muss man die mit $A^3 = E$ auswählen, woraus folgt, dass $a = 0$.

  Also kommen die Automorphismen $\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$, $\lambda_i, \lambda_j = 1, 2, 4$ in Frage. Kommt eine 1 vor, ist der Fall bereits oben abgehandelt. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ erzeugen nichtisomorphe Untergruppen, die restlichen sind isomorph zu einer der beiden, wie man sich leicht überlegt.

  Es bleiben die Homomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{49})$ zu untersuchen: Multiplikation mit $u = 18$ und $v = 30$ haben Ordung 3. Jedoch ist $30 \cdot 30 \equiv_{49} 18$, also ergeben diese auch isomorphe Untergruppen.

  Alternative Argumentation: Mit dem dritten Satz von Sylow kann es genau 1+7k viele 7-Sylowgruppen geben ($k = 0, 1, \dots$). Da diese jedoch gemäß dem zweiten Satz von Sylow konjugiert zueinander sind und $(G : P) = 3$ für alle Sylowgruppen P, ist nur 1 möglich.

Abgabe der Hausübungen: Am 22./23./29./30. Juni 2010 zu Beginn der Übung.