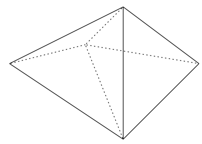
Einführung in die Algebra
4. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 13 Lemma von Burnside

Wir betrachten das Polyeder, das aus zwei Tetraedern entsteht, die man an zwei Seitenflächen verklebt.



1. Bestimme mit Hilfe der Bahnformel die Ordnung der Symmetriegruppe G dieses Polyeders.
2. Bestimme die Konjugiertenklassen von G.
3. Sei $G_+ \subset G$ die Drehgruppe. Bestimme die Konjugiertenklassen von G_+.
4. Auf wieviele Arten kann man die Flächen mit bis zu 3 Farben einfärben?

1. *Betrachten wir die Wirkung der Symmetriegruppen auf die Seitenflächen, so ist die Bahn einer solchen Seitenfläche x die Menge aller sechs Seitenflächen, denn durch Drehungen um die vertikale Achse bzw. Spiegelung an der horizontalen Ebene, in der die verklebten Seitenflächen liegen, kann man eine Fläche überall hinbekommen. Die feste Seitenfläche x wird fixiert von der Identität und der Spiegelung an der vertikalen Ebene, die die Seite halbiert. Nach der Bahnformel ist die Ordnung der Symmetriegruppe G gegeben durch $|G| = |B_x| \cdot |G_x| = 6 \cdot 2 = 12$.*

   Alternativ kann man die Wirkung von G auf die Ecken betrachten. Die Bahn der oberen Ecke y besteht nur aus der oberen und unteren Ecke (Spiegelung an der horizontalen Ebene), weil bei den anderen Ecken vier statt drei Seitenflächen aneineinanderstoßen. Die Standgruppe von y enthält die Identität, zwei Drehungen um die vertikale Achse sowie drei Spiegelungen an vertikalen Ebenen, die je eine der drei an y anstoßenden Kanten enthalten. Wieder mit der Bahnformel ergibt sich $|G| = |B_y| \cdot |G_y| = 2 \cdot 6 = 12$.
2. *Die Symmetrieabbildungen sind:*
   - *die Identität* id,
   - *Drehungen δ und δ^2 um die horizontale Achse um die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$,*
   - *Drehungen ρ_1, ρ_2 und ρ_3 um eine der drei vertikalen Achsen durch den Schwerpunkt und eine der Ecken, und zwar um den Winkel π,*
   - *Spiegelungen σ_1, σ_2 und σ_3 an einer der drei vertikalen Ebenen durch den Schwerpunkt und zwei der Kanten,*
   - *die Spiegelung τ an der horizontalen Ebene, die die verklebten Seitenflächen enthält,*
   - *und zwei Drehspiegelungen $\tau \circ \delta$ und $\tau \circ \delta^2$, die man nicht direkt sieht.*

   Die Elemente in einem Unterpunkt sind jeweils konjugiert zueinander. Nach unseren Überlegungen in a) sind das alle Symmetrieabbildungen.
3. *Es sind jeweils die Drehungen konjugiert, deren Drehachsen sich durch eine Drehung aus G_+ ineinander überführen lässt.*
4. *Wir wenden das Lemma von Burnside an auf die Wirkung von G auf die Flächen des Körpers:*

Abbildung g	*Bahnen*	$\lvert Fix(g)\rvert$	*Anzahl*	*Summe*
id	6	$3^6 = 729$	1	729
δ, δ^2	2	$3^2 = 9$	2	18
ρ_1, ρ_2, ρ_3	3	$3^3 = 27$	3	81
σ_1, σ_2, σ_3	4	$3^4 = 81$	3	243
τ	3	$3^3 = 27$	1	27
$\tau \circ \delta$, $\tau \circ \delta^2$	1	$3^1 = 3$	2	6
			12	1104

Damit gibt es (wieder) $1104 : 12 = 92$ *solche Färbungen.*

G 14 (Dreiecksmatrizen als semidirektes Produkt)

Wir betrachten die Mengen

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\},\ U := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \Delta \,\middle|\, a, c \in \mathbb{R}^\times \right\},\ N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Delta \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Zeige, dass Δ und U Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sind und dass N ein Normalteiler von Δ ist.
2. Zeige, dass $\Delta \cong N \rtimes_\alpha U$ für einen geeigneten Homomorphismus $\alpha\colon U \to \mathrm{Aut}(N)$.

Δ und U sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $U \leq \Delta$:

Die Wahl $a = c = 1$, $b = 0$ zeigt, dass die Einheitsmatrix E_2 in Δ und G enthalten ist. Da

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

für $a, a_1, a_2, c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^\times$, $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, ist Δ unter der Matrizenmultiplikation und Inversion abgeschlossen, also eine Untegruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Wählen wir $b = b_1 = b_2 = 0$ in vorigen Formeln, so sehen wir, dass auch U unter Matrizenmultiplikation und Inversion abgeschlossen ist. Da ferner offenbar $U \subseteq \Delta$ gilt, ist auch $U \leq \Delta$.

N ist Normalteiler von Δ:

Wir zeigen, dass $\phi\colon \Delta \to G$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ein Gruppenhomomorphismus mit Kern N ist, somit also $N \lhd \Delta$ nach Lemma I.2.10:

Die Abbildung ϕ bildet

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \quad \textit{auf} \quad \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix}$$

ab, und dieses Element ist das Produkt der Bilder

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad \textit{von} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Also ist ϕ ein Homomorphismus. Das Bild $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in U$ unter ϕ ist die Einheitsmatrix genau dann, wenn $a = c = 1$; der Kern von ϕ ist also N.

Δ ist ein semidirektes Produkt von N und U:

$G \cap N = \{E_2\}$ ist klar. Weiter gilt $\Delta = NG$, da für $a, c \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bc^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Nach Satz I.3.13 ist daher $\Delta \cong N \rtimes_\alpha G$ *mit* $\alpha\colon U \to \mathrm{Aut}(N)$, $\alpha(g)(n) := gng^{-1}$. *Für* $g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ *und* $n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *erhält man also*

$$\alpha(g)(n) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & abc^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

G 15 (Satz von Cauchy)

Ist G eine Gruppe mit $p \mid |G|$, dann enthält G ein Element der Ordnung p.

Hinweise: Betrachte $S = \{(x_1, \ldots, x_p) \in G \times \cdots \times G \mid x_1 \cdots x_p = 1\}$. *Bestimme* $|S|$. $c : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_2, \ldots, x_p, x_1)$ *definiert die Wirkung einer Untergruppe von* S_n *auf* S.

$|S| = |G|^{p-1}$. $\langle c \rangle = C_p$

Ein Element $(x_1, \ldots, x_p)$ *ist genau dann in* $\mathrm{Fix}(c) = \mathrm{Fix}(C_p)$, *wenn* $x_1 = \cdots = x_p)$. *Jedes* $x \in \mathrm{Fix}(C_p)^c$ *erzeugt eine p-elementige Bahn. Also ist* $|S| = |Fix(G)| + p|\{mehrelementigeOrbita\}|$. *Es gilt trivialerweise* $(e, \ldots, e) \in \mathrm{Fix}(C_p)$. *Angenommen* $\mathrm{Fix}(C_p) = \{(e, \ldots, e)\}$, *dann* $|Fix(G)| = 1$ *und somit* $p^{p-1} \equiv 1 \pmod p$), *Widerspruch.*

G 16 (Semidirektes Produkt)

1. Eine Gruppe G der Ordnung pq ($p, q \in \mathbb{P}$) ist entweder direktes oder semidirektes Produkt zweier Gruppen M und N der Ordnungen $|M| = p$ und $|N| = q$.
2. Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}_n$.
3. Zeige, dass $C_n \cong (\mathbb{Z}_n, +)$, wobei $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ die zyklische Gruppe der Ordnung n bezeichnet.
4. Geben Sie einen Isomorphismus $Aut(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_m$ für ein $p \in \mathbb{P}$ an.
5. Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 15 ist abelsch.
6. Konstruieren Sie eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 21.

1. *Sei o.B.d.A.* $p > q$. *Wegen des Satzes von Cauchy gibt es Elemente der Ordnung* p *und* q. *Die von ihnen erzeugten zyklischen Untergruppen* C_p *und* C_q *schneiden sich trivial und die größere ist ein Normalteiler in* G, *denn wären* N_1 *und* N_2 *Untergruppen der Ordnung* p *und konjugiert zueinander, so würde der Widerspruch* $pq = |G| \geq |N_1 N_2| \geq p^2$ *folgen. Also ist* $G = C_q \times_\alpha C_p$.
   Jetzt müssen wir alle Homomorphismen $\alpha : C_q \to Aut(C_p)$ *klassifizieren.*
   - *Fall 1:* $Ker(\alpha) = C_q$, *also* $\alpha(C_q) = \{id_{C_p}\}$. *Dann ist* C_q *auch ein Normalteiler und* $G = C_q \times C_p \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$.
   - *Fall 2: Wir verwenden* $C_p \cong (\mathbb{Z}_p, +)$ *und* $(\mathbb{Z}_p^\times, \cdot) \cong C_{p-1}$ *um Automorphismen von* $\mathbb{Z}_p$ *zu konstruieren: Sei* $z \in \mathbb{Z}_p^\times$, *dann definiere* $M_z : u \mapsto zu$ $(u \in \mathbb{Z}_p)$. M_z *erzeugt eine Gruppe vom Typ* $C_{p-1} \hookrightarrow Aut(\mathbb{Z}_p)$. *Nun gibt es genau dann einen Homomorphismus* $\alpha : C_q \to Aut(\mathbb{Z}_p)$, *wenn* q *ein Teiler von* $p - 1$ *ist. Dann ist* α *eine Einbettung in* $Aut(\mathbb{Z}_p)$ *und* $Ker(\alpha) = q\mathbb{Z}$.

Hausübung

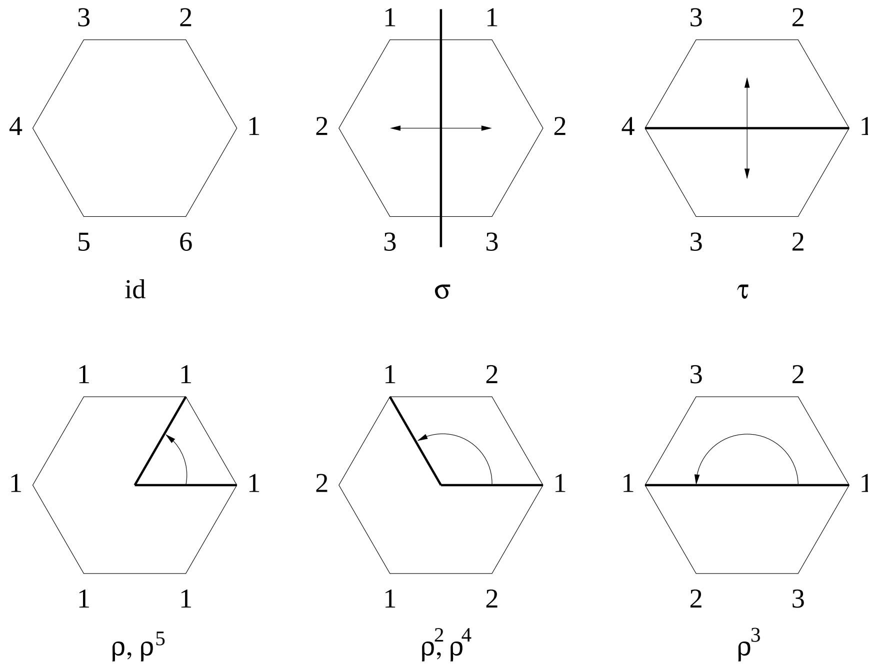
H 13 (Lemma von Burnside)

Bestimme die Isomorphiegruppen von Perlenketten mit 6 Perlen, die schwarz, blau oder weiß sein können.

Sei X die Menge aller solcher Färbungen, von denen es insgesamt 3^6 gibt (3 mögliche Farben für jede der sechs Ecken). Nicht alle diese Färbungen führen aber zu verschiedenen Perlenketten.

Genau dann wollen wir zwei Färbungen x und y nicht unterscheiden, wenn es eine Symmetrieabbildung $g \in D_6$ gibt mit $\sigma_g(x) = y$, d.h. wenn $y \in B_x$ bzw. x und y in derselben Bahn liegen. Die Anzahl der verschiedenen Perlenketten entspricht also der Anzahl der Bahnen unter dieser Wirkung, und die können wir mit dem Lemma von Burnside bestimmen.

Wir brauchen dazu für jedes Gruppenelement $g \in D_6$ die Zahl $|\mathrm{Fix}(g)|$ aller Fixpunkte von X unter der Wirkung von σ_g. Eine Färbung verändert sich unter der Wirkung σ_g genau dann nicht, wenn je zwei Ecken, die von g aufeinander abgebildet werden, gleiche Farbe haben. In der Skizze auf der nächsten Seite sind alle möglichen Typen von Symmetrieabbildungen aufgeführt, wobei wir Ecken, die aufeinander abgebildet werden, mit denselben Zahlen benennen (das sind die Bahnen bzgl. der Wirkung von $\mathrm{id}, g, g^2, \ldots$ auf den Ecken).



Beispielsweise entsprechen sich bei der Spiegelung σ je zwei Ecken, die aufeinander abgebildet werden. Eine Färbung wird von σ fixiert, wenn Ecken mit gleichen Nummern gleich gefärbt sind. Hier kann man also drei Farben frei wählen, und es gibt $|\mathrm{Fix}(\sigma)| = 3^3$ solche Färbungen. Das machen wir systematisch für alle Typen von Symmetrieabbildungen, und beachten bei der Summation die Anzahl solcher Abbildungen in D_6:

Abbildung g	*Freiheitsgrade*	$\lvert Fix(g)\rvert$	*Anzahl*	*Summe*
id	6	$3^6 = 729$	1	729
σ	3	$3^3 = 27$	3	81
τ	3	$3^4 = 81$	3	243
ρ	2	$3^1 = 3$	2	6
ρ^2	2	$3^2 = 9$	2	18
ρ^3	3	$3^3 = 27$	1	27
			12	1104

Nach dem Lemma von Burnside gibt es $\frac{1}{|D_6|}\sum_{g\in D_g}|Fix(g)| = 1104 : 12 = 92$ *Bahnen, also 92 verschiedene Perlenketten mit sechs Perlen, die schwarz, weiß oder blau sind.*

H 14 (Klassifikation gerichteter Graphen)

Bestimme die Isomorphieklassen schlichter gerichteter Graphen mit 4 Vertizes (ohne Schleifen und ohne doppelte Kanten).

1. *(ungerichtete Kanten zugelassen) Die gerichteten Kanten des Graphen sind geordnete 2-Tupel* (i, j)*. Die Symmetriegruppe* S_4 *operiert kanonischerweise darauf.* $|S_4| = 24$*.*
   Ein gerichteter Graph entspricht der Zuordnung: $\{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 4\} \to \{0, 1\}$*, also gibt es* $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ *solcher Graphen. Die Äquivalenzklassen entsprechen den Bahnen der Symmetriegruppe.*
   Deren Bahnen sind
   - *6 Transpositionen einzelner Paare von Vertizes* τ_{ij}
   - *3 Transpositionen zwei Paare* $\tau_{(ij)(kl)}$
   - *8 3-Zyklen* σ_i
   - *6 4-Zyklen* ζ
2. *Wir wenden das Lemma von Burnside auf die Wirkung der* S_4 *an:*

Abbildung g	*Bahnen*	$\lvert Fix(g)\rvert$	*Anzahl*	*Summe*
id	6	$2^6 = 64$	1	64
τ_{ij}	7	$2^7 = 128$	6	768
$\tau_{(ij)(kl)}$	5	$2^5 = 32$	3	96
σ_i	4	$2^4 = 16$	8	128
ζ	2	$2^2 = 4$	6	24
			24	1080

   Damit gibt es $1080/24 = 45$ *solcher Graphen.*
3. *(nur einfache gerichtete Kanten zugelassen)*
   Ein solcher Graph entspricht der Zuordnung: $\{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 4, i < j\} \to \{0, \to, \leftarrow\}$*, also gibt es* $3^6 = 729$ *solcher Graphen. Die Äquivalenzklassen entsprechen den Bahnen der Symmetriegruppe.*
   Deren Bahnen sind wie oben.
4. *Wir wenden das Lemma von Burnside auf die Wirkung der* S_4 *an:*

Abbildung g	*Freiheitsgrade*	$\lvert Fix(g)\rvert$	*Anzahl*	*Summe*
id	6	$3^6 = 729$	1	729
τ_{ij}	3	3^27	6	162
$\tau_{(ij)(kl)}$	2	$3^2 = 9$	3	27
σ_i	2	$3^2 = 9$	8	72
ζ	1	3	6	18
			24	1008

Damit gibt es $1008/24 = 42$ *solcher Graphen.*

H 15 (Quaternionengruppe) Wir betrachten die mit allen Matrizen vertauschende 2×2-Matrix $\mathbf{m} := -E_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sowie die invertierbaren komplexen 2×2-Matrizen

$$\mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $\mathbf{m}^2 = E_2$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{m}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{mji}$.

(b) Zeige, dass $Q := \{\mathbf{m}^a\mathbf{i}^b\mathbf{j}^c : a, b, c \in \{0, 1\}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist. Zeige, dass Q die Ordnung 8 hat.

(c) Wir schreiben $\mathbf{k} := \mathbf{ij}$. Zeige, dass $\mathbf{k}^2 = \mathbf{m}$. Bestimme die Ordnung jedes Elements von Q.

(d) Bestimme alle Untergruppen von Q. Zeige, dass jede ein Normalteiler ist.

1. *Die Identitäten rechnet man unmittelbar nach.*
2. *Es seien* $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1\}$.
   Ist $c = 0$, *so gilt, da* $\mathbf{m}^{a'}$ *mit allen Elementen vertauscht:*

   $$\mathbf{m}^a\mathbf{i}^b\mathbf{m}^{a'}\mathbf{i}^{b'}\mathbf{j}^{c'} = \mathbf{m}^a\mathbf{m}^{a'}\mathbf{i}^b\mathbf{i}^{b'}\mathbf{j}^{c'} = \mathbf{m}^{a+a'}\mathbf{i}^{b+b'}\mathbf{j}^{c'}.$$

   Ist $b+b'$ *gerade, so ist voriges Element gleich* $\mathbf{m}^{a+a'+(b+b')/2}\mathbf{i}^0\mathbf{j}^{c'}$, *also von der geforderten Form (denn* $a+a'+(b+b')/2$ *lässt sich noch durch die modulo 2 kongruente Zahl* 0 *oder* 1 *ersetzen, da* $\mathbf{m}$ *die Ordnung* 2 *hat). Ist* $b+b'$ *ungerade, so ist* $b+b' = 1 + (b+b'-1)$ *mit* $b+b'-1$ *gerade, somit das zu untersuchende Element von der Form*

   $$\mathbf{m}^{a+a'+(b+b'-1)/2}\mathbf{i}^1\mathbf{j}^{c'}$$

   und somit in Q.
   Ist $c = 1$, *so ist* $\mathbf{m}^a\mathbf{i}^b\mathbf{j}\mathbf{m}^{a'}\mathbf{i}^{b'}\mathbf{j}^{c'} = \mathbf{m}^{a+a'}\mathbf{i}^b\mathbf{j}\mathbf{i}^{b'}\mathbf{j}^{c'}$, *wobei* $\mathbf{j}\mathbf{i}^{b'} = \mathbf{m}\mathbf{i}^{b'}\mathbf{j}$ *falls* $b' = 1$, *andernfalls* $\mathbf{j}\mathbf{i}^0 = \mathbf{i}^0\mathbf{j}$. *In beiden der Fälle führen Umformungen ähnlich den obigen wieder zu dem Schluss, dass das zu untersuchende Element in* Q *liegt.*
   Schließlich gilt $1 = \mathbf{m}^0\mathbf{i}^0\mathbf{j}^0 \in Q$. *Nachrechnen zeigt, dass* E_2 *die Ordnung 1 hat; die Elemente* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{ij}, \mathbf{mi}, \mathbf{mj}, \mathbf{mij}$ *die Ordnung 4, und* $\mathbf{m}$ *die Ordnung* 2. *Daher lässt sich* x^{-1} *für jede der Matrizen* $x \in Q$ *als eine Potenz von* x *schreiben und ist daher ein Element von* Q. *Somit ist* Q *eine Untergruppe von* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. *Anschauen der Matrizen der Elemente* $\mathbf{m}^a\mathbf{i}^b\mathbf{j}^c$ *zeigt, dass diese paarweise verschieden sind, es sind 8 verschiedene. Also* $|Q| = 8$.
3. $\mathbf{k}^2 = \mathbf{m}$ *rechnet man mit den Matrizen direkt nach. Die Ordnungen aller Elemente von* Q *wurden bereits in der Lösung zu (b) angegeben.*
4. $\{E_2\}$ *und* Q *sind trivialerweise Normalteiler von* Q. *Das Element* $\mathbf{m}$ *hat die Ordnung* 2 *und vertauscht mit jedem anderen; daher ist* $\{E_2, \mathbf{m}\}$ *ein Normalteiler von* Q. *Ist* H *irgendeine Untergruppe der Ordnung* 2 *von* Q, *so ist diese zyklisch von der Ordnung* 2; *es gibt also ein* $x \in Q$ *der Ordnung 2 mit* $H = \{E_2, x\}$. *Da* $\mathbf{m}$ *das einzige Element der Ordnung 2 ist, folgt* $H = \{E_2, \mathbf{m}\}$. *Nach dem Satz von Lagrange haben alle anderen möglichen Untergruppen die Ordnung 4, somit den Index 2,weswegen sie Normalteiler sind. Ist* H *eine Untergruppe der Ordnung 4, so ist entweder* H *zyklisch von der Ordnung 4 oder* H *isomorph zur Kleinschen Vierergruppe* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Letzteres ist jedoch nicht möglich, da* G *und somit* H *nur ein Element der Ordnung* 2 *besitzt. Also muss*

H zyklisch sein. Die von den oben bestimmten Elementen der Ordnung 4 erzeugten Untergruppen sind:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{i} \rangle &= \langle \mathbf{mi} \rangle = \{E_2, \mathbf{i}, \mathbf{m}, \mathbf{mi}\}; \\ \langle \mathbf{j} \rangle &= \langle \mathbf{mj} \rangle = \{E_2, \mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{mj}\}; \\ \langle \mathbf{ij} \rangle &= \langle \mathbf{mij} \rangle = \{E_2, \mathbf{ij}, \mathbf{m}, \mathbf{mij}\}\,. \end{aligned}$$

Damit sind alle Untergruppen gefunden und jede ist ein Normalteiler.

H 16 (Gruppen mit 8 Elementen)

Klassifizieren Sie semidirekte Produkte der Gruppen $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_2$ (bis auf Isomorphie) und identifizieren Sie diese mit bekannten Gruppen. Ist die Quaternionengruppe mit dabei?

Das Problem reduziert sich auf die Klassifikation der Homomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_4)$. Nun ist $Aut(\mathbb{Z}_4) = \{id, \eta\}$ mit $\eta(x) = x^{-1}$. Daher existiert nur ein nichtabelsches semidirektes Produkt $\mathbb{Z}_2 \times_\alpha \mathbb{Z}_4$). Es ist isomorph zur Diedergruppe D_4.

Die Quaternionengruppe ist kein semidirektes Produkt, da sich alle Normalteiler nichttrivial schneiden.

H 17 (Orthogonale Gruppen)

1. $\mathbb{O}(n)$ ist die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Geben Sie ein Repräsentantensystem unter Konjugation an.
2. Zeigen Sie für $n = 2, 3 :$ A und B sind konjugiert in $\mathbb{O}(n)$ genau dann, wenn $\det A = \det B$ und $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$.

Abgabe der Hausübungen: Am 8./9./15./16. Juni 2010 zu Beginn der Übung.