Einführung in die Algebra
3. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 9 (Zyklenzerlegung)

Gegeben sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in S_9$.

1. Bestimmen Sie die kanonische Zerlegung von σ in disjunkte Zyklen.
2. Geben Sie eine Zerlegung σ in Transpositionen an.
3. Welche Ordnung hat σ?
4. Bestimmen Sie das Signum von σ?
5. Geben Sie die Inverse σ^{-1} als Produkt disjunkter Zyklen an. Welche Ordnung hat σ^{-1}?

1. $\sigma = (1,6)(2,3,7)(5,8,9)$.

2. Da $(a_0, a_1, \dots a_r) = (a_0, a_1)(a_1, \dots, a_r)$, *haben wir:* $\sigma = (1,6)(2,3)(3,7)(5,8)(8,9)$.

3. $6 = kgV(2,3,3)$

4. $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^5 = -1$.

5. $\sigma^{-1} = (8,9)^{-1}(5,8)^{-1}(3,7)^{-1}(2,3)^{-1}(1,6)^{-1} = (8,9)(5,8)(3,7)(2,3)(1,6) = (9,8,5)(2,7,3)(1,6)$.

G 10 (Zykeln)

Zeigen Sie:

1. Für alle $\sigma \in S_n,\ n \in \mathbb{N}$ und jeden Zykel $(a_1, \dots, a_s)$, $s < n$ gilt:
$$\sigma(a_1, \dots, a_s)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_s)).$$
2. Sei A_n die Gruppe, die von den 3-Zykeln in S_n erzeugt wird. Dann gilt: A_n ist ein Normalteiler von S_n.
3. Die Funktion $\operatorname{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ ist der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismus, für den gilt: $\ker(\operatorname{sign}) = A_n$.

1. Für alle $k = 1, \dots, s-1$ *haben wir*
$$\begin{aligned}(\sigma(a_1 \dots a_s)\sigma^{-1})(\sigma(a_k)) &= (\sigma(a_1 \dots a_s))(a_k) = \sigma(a_{k+1}) \ \ \textit{und} \\ (\sigma(a_0 \dots a_s)\sigma^{-1})(\sigma(a_s)) &= \sigma(a_0).\end{aligned}$$
Für alle anderen, also $\sigma(x) \in \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_s)\}$, *bleiben von dem Zyklus unberührt:*
$$(\sigma(a_1 \dots a_s)\sigma^{-1})(\sigma(x)) = \sigma(x).$$
Die rechte Seite ist
$$(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_s))(\sigma(x)) = \begin{cases} \sigma(a_k + 1) & \textit{if } x = a_k, (k = 1, \dots, s-1) \\ \sigma(a_0) & \textit{if } x = a_s \\ \sigma(x) & \textit{else.} \end{cases}$$
q.e.d.

2. *Für ein $\in A_n$ gilt:* $\tau = (a_1, b_1, c_1) \circ \cdots \circ (a_n, b_n, c_n)$ $n \geq 1$. *Also ist*

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(b_1), \sigma(c_1)) \circ \cdots \circ (\sigma(a_n), \sigma(b_n), \sigma(c_n)),$$

   denn wir können beliebig $\sigma \circ \sigma^{-1}$ *einschieben und 1. anwenden.*

3. *1. Beweis: Dass jedes Element aus* A_n *Signum* 1 *hat und Signum ein Gruppenhomomorphismus ist, ist klar. Andersherum ist ein Element mit Signum* 1 *darstellbar als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen* $(a_1, b_1)(a_2, b_2)\cdots$. *Sind zwei benachbarte Transpositionen nicht disjunkt, dann ergeben sie bereits einen 3-Zykel. Für disjunkte Paare von Transpositionen gilt* $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, a_2, b_1)(a_2, b_2, a_1)$. *Also ist auch* $ker(\text{sign}) \subset A_n$ *und damit* $ker(\text{sign}) = A_n$.

   2. Beweis: Da A_n *ein Normalteiler ist, existiert nach dem Homomorphiesatz ein (bis auf Isomorphie) eindeutiger Gruppenhomomorphismus* $\pi : S_n \to H$, *für den* $A_n = ker\,\pi$ *ist. Für alle* $\sigma \in A_n$ *und alle Transpositionen* (a_1, a_2) *ist* $\pi((a_1, a_2) \circ \sigma) = \pi((a_1, a_2)) \neq 1$. *Da* $1 = \pi(id) = \pi((a_1, a_2)^2) = (\pi(a_1, a_2))^2$ *ist und jeder 3-Zykel Produkt zweier Transpositionen ist, ist* $\text{Im}(\pi) = \{\pm 1\}$, *womit* $\pi \cong \text{sign}$ *wie gewünscht.*

G 11 (Würfelgruppe)

Um die Symmetriegruppe des Würfels besser zu verstehen, betrachten wir die Ecken des $[0, 1]$-Würfels als Dreitupel von Nullen und Einsen.

1. Die Gruppe S_3 wirkt auf solche Dreitupel durch Vertauschen der Koordinaten. Was bedeutet diese Wirkung geometrisch? Überprüfe die Bahnformel an diesem Beispiel.
2. Beschreibe die Bahnen der Wirkung der gesamten Symmetriegruppe. Bestimme dazu jeweils die Untergruppen, die treu/transitiv auf diesen operieren. Was sind die entsprechenden Fixpunkte?

1. *Die beiden gegenüberliegenden Eckpunkte* $(0, 0, 0)$ *und* $(1, 1, 1)$ *bleiben fixiert. Wir haben zwei weitere Bahnen, die Ecken, die direkt an* $(0, 0, 0)$ *angrenzen und die Ecken, die direkt an* $(1, 1, 1)$ *angrenzen. Für die Fixpunkte ist die Bahn trivial und der Stabilisator die volle* S_3. *Jeder der anderen beiden Bahnen hat 3 Elemente und der Stabilisator einer einzelnen Kante* (x, y, z) *mit z.B.* $x \neq y$ *wird erzeugt durch die Transposition* (x, y), *ist also der Ordnung 2, womit* $6 = |S_3| = 2 \cdot 3$ *bestätigt ist.*
2. *Wir beginnen mit den* S_3*-Symmetrien gemäß Teil 1 der Aufgabe. Jede hat 4 Bahnen. In Teil 1 sind diese durch die Zahl der Koordinaten mit Wert 1 indiziert.* $(0, 0, 0)$ *und* $(1, 1, 1)$ *sind Fixpunkte,* A_3 *beschreibt eine treue Wirkung auf jeder der beiden anderen. Die Transpositionen der Koordinaten (*S_2*-Wirkungen) beschreiben die Spiegelungen mit 2 Fixpunkten. Es gibt 3 Spiegelungen mit je 0 Fixpunkten (Spiegelung an Parallelebenen). Diese Spielungen sind durch die (kanonische) Wirkung von* $(C_2, +)^3$ *auf* $\{0, 1\}^3$ *charakterisiert.*

G 12 (Linksnebenklassen vs. Rechtsnebenklassen).

Es sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.

(a) Der Index $[G : H]$ wurde definiert als die Zahl der Linksnebenklassen von H in G. Zeige, dass $[G : H]$ auch mit der Zahl der Rechtsnebenklassen von H in G übereinstimmt. *Hinweis: Wie könnte man einer Linksnebenklasse eine Rechtsnebenklasse zuordnen?*

(b) Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist, falls $[G : H] = 2$.

(a) Es sei $i : G \to G$, $i(x) := x^{-1}$ *die Inversion. Gegeben eine Linksnebenklasse* gH *gilt* $i(gH) = i(H)i(g) = Hg^{-1}$*: Weil* H *eine Untergruppe ist, ist nämlich* $i(H) = \{x^{-1} : x \in H\} = H$*. Analog ist* $i(Hg) = g^{-1}H$ *eine Linksnebenklasse für jede Rechtsnebenklasse* Hg*. Bezeichnet* $H\backslash G$ *die Menge aller Rechtsnebenklassen von* H *in* G*,*[2] *so haben wir also Abbildungen*

$$\Phi\colon G/H \to H\backslash G, \quad \Phi(gH) := i(gH) \qquad \text{und}$$

$$\Psi\colon H\backslash G \to G/H, \quad \Psi(Hg) := i(Hg)\,.$$

Wegen $(\Psi \circ \Phi)(gH) = i(i(gH)) = (i \circ i)(gH) = id_G(gH) = gH$ *für alle* $gH \in G/H$ *ist* $\Psi \circ \Phi\colon G/H \to G/H$ *die identische Abbildung, und analog ist* $\Phi \circ \Psi$ *die identische Abbildung* $H\backslash G \to H\backslash G$*. Es ist also* Φ *eine Bijektion, mit inverser Abbildung* Ψ*. Somit haben* G/H *und* $H\backslash G$ *die gleiche Anzahl von Elementen.*

(b) Ist $[G : H] = 2$*, so hat* H *zwei Linksnebenklassen und somit zwei Rechtsnebenklassen in* G*, nach Teil (a). Eine der Linksnebenklassen ist* $H = 1H$*; sei* X *die andere. Da* G/H *eine Partition von* G *ist, haben wir*

$$G = H \cup X\,,$$

wobei die Mengen H *und* X *disjunkt sind; es ist also* $X = H^c$ *das Komplement von* H *in* G*. Analog sehen wir, dass auch für die von* H *verschiedene Rechtsnebenklasse* Y *gilt* $Y = H^c$*. Gegeben* $x \in G$ *gibt es nun zwei Möglichkeiten: Ist* $x \in H$*, so haben wir* $xH = H = Hx$*. Ist andererseits* $x \notin H$*, so muss* $xH = X$ *und* $Hx = Y$ *sein, weswegen auch in diesem Falle* $xH = X = Y = Hx$*. Somit ist* H *ein Normalteiler.*

---

[2] Warnung: Das gleiche Symbol $H \setminus G$ bezeichnet die mengentheoretische Differenz. Es besteht also Verwechslungsgefahr, und man muss sich immer klarmachen, was denn nun gemeint ist!

Hausübung

H 9 (Erzeuger der Symmetrischen Gruppen)

Zeigen Sie jeweils, dass S_n durch die angegebene Mengen von Zykeln erzeugt wird:

(i) Alle Transpositionen.

(ii) Die Transpositionen $(1,2),(1,3),\dots,(1,n)$.

(iii) Die Transpositionen $(1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)$.

(iv) Die Elemente $(1,2),(2,\dots,n)$ $(n \geq 2)$.

(v) Die Elemente $(1,n),(1,\dots,n)$.

(*Hinweis: Benutzen Sie* G11.)

(i) This follows from the canonical decomposition of a permutation into pairwise disjoint cycles and the fact that $(a_0,a_1,\dots a_r) = (a_0,a_1)(a_1,\dots,a_r)$.

(ii) By (i) it suffices to generate all transpositions by the special transpositions $(1,2),(1,3),\dots,(1,n)$. *For any transposition* (a,b), $a \neq b$ *one easily checks that* $(a,b) = (1,a)(1,b)(1,a)$.

(iii) Using $(1,k) = (1,k-1)(k-1,k)(1,k-1)$ *and induction over* k*, we can generate every* $(1,k)$ *out of* $(1,2),(2,3),\dots,(k-1,k)$. *By (ii), we therefore can generate all of* S_n *out of these elements.*

(iv) Using $(1,k) = (2,\dots,n)(1,k-1)(n,\dots,2)$ *for* $k = 2,\dots,n$ *and induction over* k*, we can generate every* $(1,k)$ *out of* $(1,2),(2,\dots,n)$. *By (ii), we therefore can generate all of* S_n *out of these elements.*

(v) Using $(1,2) = (1,\dots,n)(1,n)(n,\dots,1)$ *and* $(k,k+1) = (1,\dots,n)(k-1,k)(n,\dots,1)$ *for* $k = 2,\dots,n-1$ *and induction over* k*, we can generate every* $(k,k+1)$ *out of* $(1,n),(1,\dots,n)$. *By (iii), we therefore can generate all of* S_n *out of these elements.*

H 10 Betrachte die Gruppe D_4, die von den Permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Diese Gruppe ist isomorph zur Gruppe der Abbildungen, die ein Quadrate auf sich selbst abbilden (*vergleiche* G3).

1. Bestimme alle Elemente von D_4.
2. Bestimme die zyklischen Untergruppen von D_4.
3. Bestimme alle Untergruppen von D_4.
4. Welche der Untergruppen von D_4 sind normal?

Erzeuger für die einzelnen Untergruppen sind wie folgt:

$$C_4\text{:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V_4\text{:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V_4\text{:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Untergruppen der Ordnung 2 sind jeweils von einem Element der Ordnung 2 erzeugt. Zu den obigen Elementen der Ordnung 2 kommt noch das Element $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *hinzu, das den Normalteiler der Ordnung 2 erzeugt.*

H 11 ($\mathbf{S_4 \subset A_4 \subset V_4 \subset E}$)

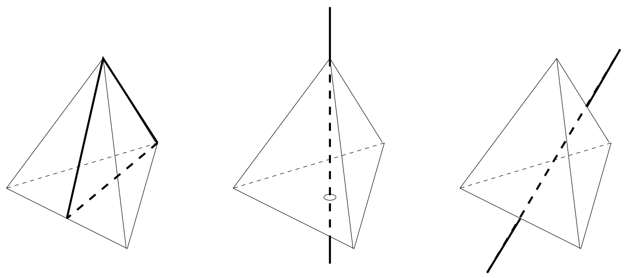
Wir betrachten die Symmetriegruppe G eines regulären Tetraeders.

1. Bestimme alle Drehachsen und Spiegelebenen
2. Begründe, dass G isomorph zu S_4 ist.
3. Zeige, dass die Drehgruppe des regulären Tetraeders isomorph zur Gruppe A_4, der Gruppe der geraden Permutationen auf 4 Punkten ist.
4. Zeige, dass A_4 einen Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe hat.

1. *Die Symmetrieebenen gehen alle durch den Schwerpunkt und enthalten eine der Kanten, es gibt also sechs verschiedene. Drehachsen gibt es zwei verschiedene Typen:*

Typ I: *Achsen durch den Schwerpunkt und eine der Ecken, also vier verschiedene. Es gibt jeweils Drehungen um die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$, d.h. acht Drehungen dieser Art.*

Typ II: *Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten, also drei verschiedene, wobei nur die Drehung um π den Körper in sich überführt.*



2. *Nummeriert man die Ecken des Tetraeders mit den Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$, so wirkt die Symmetriegruppe des Tetraeders auf dieser Menge durch eine Permutation der Ecken. Wir erhalten also einen Homomorphismus $G \to S_4$. Dieser ist injektiv, weil jede von der Identität verschiedene Symmetrie auch Ecken vertauscht.*

   Die Spiegelung an der in a) skizzierten Symmetrieebene vertauscht gerade zwei Ecken, entspricht also einer Transposition. Da durch geeigneter Wahl der Ebene zwei beliebige Ecken vertauscht werden können (wähle die Ebene, die auf der verbindenden Kante senkrecht steht), erhält man alle Transpositionen und damit die ganze Gruppe S_4 als Bild von G. Damit ist die Abbildung $G \to S_4$ der gesuchte Isomorphismus.
3. *Die Drehgruppe des Tetraeders besteht aus der Identität, den acht Drehungen vom Typ I und den drei Drehungen vom Typ II, insgesamt also 12 Elementen. Damit entspricht sie unter dem Isomorphismus aus b) einer 12-elementigen Untergruppe von S_4, und das ist A_4.*
4. $|S_4| = 4! = 24$, $|A_4| = 4!/2 = 12$. *Die Elemente* $H = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,4)(2\,3), \mathrm{id}, (1\,3)(2\,4)\}$ *bilden eine Untergruppe der Ordnung 4, und sogar einen Normalteiler, wegen G10 (i). Es ist übrigens die Klein'sche Vierergruppe V_4. Aus $|A_4/V_4| = (A_4 : V_4) = |A_4|/|V_4| = 3$ folgt sofort, dass A_4/V_4 abelsch ist (siehe H2).*

H 12 (Altbekanntes zur Determinante)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ Zeigen Sie, dass die Funktion $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$, gegegen durch

$$A \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn} \cdot (\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k\sigma(1)}\right) \cdots \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{k\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{(k_1,\ldots,k_n)} a_{1k} \cdots a_{nk} b_{k\sigma(1)} \cdots b_{k\sigma(n)} \\
&= \sum_{(k_1,\ldots,k_n)} a_{1k} \cdots a_{nk} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{k_1\sigma(1)} \cdots b_{k_n\sigma(n)}
\end{aligned}$$

Wann immer $k_i = k_j$ ist, heben sich die Terme $a_{1k} \cdots a_{nk}\operatorname{sgn}(\sigma) b_{k_1\sigma(1)} \cdots b_{k_i\sigma(i)} \cdots b_{k_j\sigma(j)} \cdots b_{k_n\sigma(n)}$ und $a_{1k} \cdots a_{nk}\operatorname{sgn}(\sigma \circ (i,j)) b_{k_1\sigma(1)} \cdots b_{k_j\sigma(j)} \cdots b_{k_i\sigma(i)} \cdots b_{k_n\sigma(n)}$ gegenseitig auf womit nur Summanden übrigbleiben, die Permutationen von $(1, \ldots, n)$ sind. Damit folgt weiter

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\tau\in S_n} a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots b_{\tau(n)\sigma(n)} \\
&= \sum_{\tau\in S_n} a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \sum_{\tau^{-1}\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) b_{1(\tau^{-1}\sigma)(1)} \cdots b_{n(\tau^{-1}\sigma)(n)} \\
&= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \sum_{\sigma'\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma') b_{1\sigma'(1)} \cdots b_{n\sigma'(n)} \\
&= \det(A)\det(B)
\end{aligned}$$

Abgabe der Hausübungen: Am 25./26. Mai und 1./2. Juni 2010 zu Beginn der Übung.