



Einführung in die Algebra

6. Übung

Gruppenübung

G 18 (Invariante Untergruppen)

Sei eine Wirkung $(g, x) \mapsto gx$ der Gruppe G auf einer Menge M gegeben und $X \subseteq M$. Wir definieren $gX = \{gx \mid x \in X\}$. Zeigen Sie

$$H = \{g \in G \mid X = gX\} \text{ ist eine Untergruppe von } G$$

G 19 (Oktagon)

D_8 bezeichne die Gruppe aller Symmetrien des regelmäßigen Achtecks.

1. Bestimme die Ordnung von D_8 .
2. Zeige, dass $D_8 = \text{Span}\{d, s\}$ für eine passende Drehung d und Spiegelung s .
3. Verifiziere:

$$d^8 = e = s^2, \quad sd^k = d^{-k}s \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Es gibt also eine eindeutige Darstellung der Elemente von D_8 der Form $d^k s^\ell$ mit $0 \leq k \leq 7$ und $\ell = 0, 1$.

4. Zeige, dass d^k und d^ℓ genau dann konjugiert sind, wenn $d^\ell = d^{\pm k}$ und dass $d^k s$ und $d^\ell s$ genau dann konjugiert sind, wenn $k \equiv \ell \pmod{2}$
5. Beschreibe die Konjugiertenklassen K_1, \dots, K_r von D_8 geometrisch und durch die Zykkelstruktur bei der Wirkung auf den 8 Ecken - nummerieren Sie diese fortlaufend. Geben Sie für jede Konjugiertenklasse die Ordnung ihrer Elemente und die Elementanzahl an.
6. Gib die Normalteiler von D_8 als Vereinigungen von Konjugiertenklassen an.
7. Für welche k gilt $D_8 = \text{Span}\{d^k, s\}$?
8. Wir betrachten Färbungen der Ecken des Achtecks mit 2 Farben. Die Anzahl der Bahnen äquivalenter Färbungen unter der Gruppe D_8 ist zu bestimmen.

Hausübung

H 18 (Sylowsätze)

Bestimmen Sie die Sylowuntergruppen von S_5 .

H 19 (Wirkung und Kongruenz)

(a) Zeige, dass durch

$$(A, S) \mapsto SAS^t$$

eine Wirkung von $GL(n, \mathbb{K})$ auf den symmetrischen Matrizen $\text{Sym}(n, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben ist.

(b) Es sind die Bahnen für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu beschreiben (Repräsentantensystem angeben).

H 20 (Invariante Teilmengen)

Sei eine Wirkung $(g, x) \mapsto gx$ der Gruppe G auf einer Menge M gegeben und $X \subseteq M$.

1. Gilt $gx \in X$ für alle $x \in G$, so wird auf G eine Kongruenzrelation bestimmt durch

$$g \cong h \Leftrightarrow gx = hx \text{ für alle } x \in X$$

2. Beschreibe den zugehörigen Normalteiler.

Es besteht die Möglichkeit, die Hausübungen am 6./7./13./14. Juli 2010 in der Übung vorzurechnen.