Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Dipl.-Math. Thomas Bunke

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

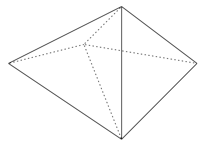
25.05.2010

Einführung in die Algebra
4. Übung

Gruppenübung

G 13 Lemma von Burnside

Wir betrachten das Polyeder, das aus zwei Tetraedern entsteht, die man an zwei Seitenflächen verklebt.



1. Bestimme mit Hilfe der Bahnformel die Ordnung der Symmetriegruppe G dieses Polyeders.
2. Bestimme die Konjugiertenklassen von G.
3. Sei $G_+ \subset G$ die Drehgruppe. Bestimme die Konjugiertenklassen von G_+.
4. Auf wieviele Arten kann man die Flächen mit bis zu 3 Farben einfärben?

G 14 (Dreiecksmatrizen als semidirektes Produkt)

Wir betrachten die Mengen

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\},\ U := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \Delta \,\middle|\, a, c \in \mathbb{R}^\times \right\},\ N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Delta \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Zeige, dass Δ und U Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sind und dass N ein Normalteiler von Δ ist.
2. Zeige, dass $\Delta \cong N \rtimes_\alpha U$ für einen geeigneten Homomorphismus $\alpha\colon U \to \mathrm{Aut}(N)$.

G 15 (Satz von Cauchy)

Ist G eine Gruppe mit $p \mid |G|$, dann enthält G ein Element der Ordnung p.

Hinweise: Betrachte $S = \{(x_1, \ldots, x_p) \in G \times \cdots \times G \mid x_1 \cdots x_p = 1\}$. *Bestimme* $|S|$. $c : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_2, \ldots, x_p, x_1)$ *definiert die Wirkung einer Untergruppe von* S_n *auf* S.

G 17 (Semidirektes Produkt)

1. Eine Gruppe G der Ordnung pq ($p, q \in \mathbb{P}$) ist entweder direktes oder semidirektes Produkt zweier Gruppen M und N der Ordnungen $|M| = p$ und $|N| = q$.
2. Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}_n$.
3. Zeige, dass $C_n \cong (\mathbb{Z}_n, +)$, wobei $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ die zyklische Gruppe der Ordnung n bezeichnet.
4. Geben Sie einen Isomorphismus $Aut(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_m$ für ein $p \in \mathbb{P}$ an.
5. Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 15 ist abelsch.
6. Konstruieren Sie eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 21.

Hausübung

H 13 (Lemma von Burnside)

Bestimme die Isomorphiegruppen von Perlenketten mit 6 Perlen, die schwarz, blau oder weiß sein können.

H 14 (Klassifikation gerichteter Graphen)

Bestimme die Isomorphieklassen schlichter gerichteter Graphen mit 4 Vertizes (ohne Schleifen und ohne doppelte Kanten).

H 15 (Quaternionengruppe) Wir betrachten die mit allen Matrizen vertauschende 2×2-Matrix $\mathbf{m} := -E_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sowie die invertierbaren komplexen 2×2-Matrizen

$$\mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $\mathbf{m}^2 = E_2$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{m}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{mji}$.

(b) Zeige, dass $Q := \{\mathbf{m}^a\mathbf{i}^b\mathbf{j}^c : a, b, c \in \{0, 1\}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist. Zeige, dass Q die Ordnung 8 hat.

(c) Wir schreiben $\mathbf{k} := \mathbf{ij}$. Zeige, dass $\mathbf{k}^2 = \mathbf{m}$. Bestimme die Ordnung jedes Elements von Q.

(d) Bestimme alle Untergruppen von Q. Zeige, dass jede ein Normalteiler ist.

H 16 (Gruppen mit 8 Elementen)

Klassifizieren Sie semidirekte Produkte der Gruppen $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_2$ (bis auf Isomorphie) und identifizieren Sie diese mit bekannten Gruppen. Ist die Quaternionengruppe mit dabei?

H 17 (Orthogonale Gruppen)

1. $\mathbb{O}(n)$ ist die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Geben Sie ein Repräsentantensystem unter Konjugation an.
2. Zeigen Sie für $n = 2, 3$: A und B sind konjugiert in $\mathbb{O}(n)$ genau dann, wenn $\det A = \det B$ und $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$.

Abgabe der Hausübungen: Am 8./9./15./16. Juni 2010 zu Beginn der Übung.