Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Dipl.-Math. Thomas Bunke

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11.05.2010

Einführung in die Algebra
3. Übung

Gruppenübung

G 9 (Zyklenzerlegung)

Gegeben sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in S_9$.

1. Bestimmen Sie die kanonische Zerlegung von σ in disjunkte Zyklen.
2. Geben Sie eine Zerlegung σ in Transpositionen an.
3. Welche Ordnung hat σ?
4. Bestimmen Sie das Signum von σ?
5. Geben Sie die Inverse σ^{-1} als Produkt disjunkter Zyklen an. Welche Ordnung hat σ^{-1}?

G 10 (Zykeln)

Zeigen Sie:

1. Für alle $\sigma \in S_n,\ n \in \mathbb{N}$ und jeden Zykel $(a_1, \ldots, a_s)$, $s < n$ gilt:
$$\sigma(a_1, \ldots, a_s)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_s)).$$
2. Sei A_n die Gruppe, die von den 3-Zykeln in S_n erzeugt wird. Dann gilt: A_n ist ein Normalteiler von S_n.
3. Die Funktion $\mathrm{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ ist der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismus, für den gilt: $\ker(\mathrm{sign}) = A_n$.

G 11 (Würfelgruppe)

Um die Symmetriegruppe des Würfels besser zu verstehen, betrachten wir die Ecken des $[0, 1]$-Würfels als Dreitupel von Nullen und Einsen.

1. Die Gruppe S_3 wirkt auf solche Dreitupel durch Vertauschen der Koordinaten. Was bedeutet diese Wirkung geometrisch? Überprüfe die Bahnformel an diesem Beispiel.
2. Beschreibe die Bahnen der Wirkung der gesamten Symmetriegruppe. Bestimme dazu jeweils die Untergruppen, die treu/transitiv auf diesen operieren. Was sind die entsprechenden Fixpunkte?

G 12 (Linksnebenklassen vs. Rechtsnebenklassen).

Es sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.

(a) Der Index $[G : H]$ wurde definiert als die Zahl der Linksnebenklassen von H in G. Zeige, dass $[G : H]$ auch mit der Zahl der Rechtsnebenklassen von H in G übereinstimmt. *Hinweis: Wie könnte man einer Linksnebenklasse eine Rechtsnebenklasse zuordnen?*

(b) Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist, falls $[G : H] = 2$.

Hausübung

H 9 **(Erzeuger der Symmetrischen Gruppen)**

Zeigen Sie jeweils, dass S_n durch die angegebene Mengen von Zykeln erzeugt wird:

(i) Alle Transpositionen.

(ii) Die Transpositionen $(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)$.

(iii) Die Transpositionen $(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)$.

(iv) Die Elemente $(1,2),(2,\ldots,n)$ $(n \geq 2)$.

(v) Die Elemente $(1,n),(1,\ldots,n)$.

(*Hinweis: Benutzen Sie* G11.)

H 10 Betrachte die Gruppe D_4, die von den Permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Diese Gruppe ist isomorph zur Gruppe der Abbildungen, die ein Quadrates auf sich selbst abbilden (*vergleiche* G3).

1. Bestimme alle Elemente von D_4.
2. Bestimme die zyklischen Untergruppen von D_4.
3. Bestimme alle Untergruppen von D_4.
4. Welche der Untergruppen von D_4 sind normal?

H 11 $S_4 \subset A_4 \subset V_4 \subset E$

Wir betrachten die Symmetriegruppe G eines regulären Tetraeders.

1. Bestimme alle Drehachsen und Spiegelebenen
2. Begründe, dass G isomorph zu S_4 ist.
3. Zeige, dass die Drehgruppe des regulären Tetraeders isomorph zur Gruppe A_4, der Gruppe der geraden Permutationen auf 4 Punkten ist.
4. Zeige, dass A_4 einen Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe hat.

H 12 **(Altbekanntes zur Determinante)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ Zeigen Sie, dass die Funktion $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$, gegegen durch

$$A \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \cdot (\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Abgabe der Hausübungen: Am 25./26. Mai und 1./2. Juni 2010 zu Beginn der Übung.