Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Dipl.-Math. Thomas Bunke

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

20.04.2010

Einführung in die Algebra
2. Übung

Gruppenübung

G 5 (Normalteiler und Homomorphiesatz für Gruppen)

Es sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus und N ein Normalteiler von G, der in $\ker f$ enthalten ist. Die Quotientenabbildung $G \to G/N$ sei mit π bezeichnet.

Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\overline{f} : G/N \to H$ gibt, so dass $f = \overline{f} \circ \pi$. Weiterhin zeige, dass folgende Aussagen richtig sind:

1. $\overline{f}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
2. Seien $\sim_\pi$ und $\sim_f$ die den obigen Faktorstrukturen zugeordneten Kongruenzrelationen. Dann gilt $N \subset ker\, f$ genau dann, wenn $a \sim_\pi b \Rightarrow a \sim_f b$.
3. $\overline{f}$ ist injektiv genau dann wenn $N = \ker f$.

Wir betrachten die konforme Gruppe $G = CO\,(n, \mathbb{R})$ bestehend aus Paaren (A, b), $A \in GL_n\,(\mathbb{R})\,,\, AA^T = I$, $b \in \mathbb{R}^n$, welche durch Operation auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist:

$$\begin{aligned} (A, b) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto Av + b. \end{aligned}$$

Sei $f : G \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ der Homomorphismus $f : (A, b) \mapsto \det(A)$ und $N = \{(I, b) \in G \mid b \in \mathbb{R}^n\}$.

1. Identifiziere die Quotientenabbildung $\pi : G \to G/N$.
2. Konstruiere $\overline{f}$ wie oben definiert.
3. Was sind die geometrischen Bedeutungen dieser Definitionen?

G 6 (Rechnen mit Kongruenzen)

1. Bestimmen Sie $0 \le x < 7$, sodass
$$x \equiv (10^{27} + 666) \cdot 27^{10} \pmod 7.$$
2.* Es seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeige, dass für ganze Zahlen m und n stets gilt
$$m \equiv n \mod p \quad \text{und} \quad m \equiv n \mod q \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \equiv n \mod pq.$$
Was bleibt von dieser Aussage richtig, wenn p und q beliebige natürliche Zahlen sein dürfen?

G 7 (Polynomdivision über Restklassenringen)

Wir rechnen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ist $x^2 + x + 1$ ein Teiler von $x^6 + 1$?

G 8 (Ideale in Polynomringen)

Sei ϕ ein Endomorphismus des Vektorraumes V. Zeige das $I(\phi) := \{p \in F[x] : p(\phi) = 0\}$ ein Ideal in $\mathbb{F}[x]$ ist.

Hausübung

H 5 (Eigenschaften endlicher Gruppen)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $2q$, wobei q eine ungerade Zahl ist. Zeige, dass G ein Element der Ordnung 2, d.h. ein Element $a \neq 0$, für das $a^2 = 1$ gilt, besitzt. Betrachte dazu die Abbildung $G \to G$, die jedem Element sein Inverses zuordnet.

H 6 (Rechnenregeln für Normalteiler)

Es seien N_1 und N_2 Normalteiler von G. Zeige:

1. $N_1 \cap N_2$ ist ein Normalteiler von G.
2. $N_1 N_2$ ist ein Normalteiler von G.
3. Ist U eine Untergruppe von G, so ist $NU = \{nu \mid n \in N, u \in U\}$ eine Untergruppe von G.

H 7 (Gauß'sche Zahlen)

Es sei Γ der Ring der ganzen Gauß'schen Zahlen und $3\Gamma = \{3(a + bi) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Skizziere Γ und 3Γ in der komplexen Zahlenebene. Zeige, dass 3Γ ein Ideal von Γ ist.
2. Gib die Kongruenzklassen der durch 3Γ definierten Kongruenzrelation an.
3. Beschreibe die Elemente des Faktorrings $\Gamma/3\Gamma$ und erstelle Verknüpfungstafeln für die Addition und die Multiplikation.
4. Ist $\Gamma/3\Gamma$ ein Körper?

H 8 (Ideale in Matrizenringen)

Beweise, dass der Ring $R := M(n \times n, \mathbb{K})$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in einem Körper $\mathbb{K}$ nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und R enthält. Ist der Matrizenring R ein Körper?

Hinweis: Aufgabe H4

Abgabe der Hausübungen: Am 11./12. Mai und 18./19. Mai 2010 zu Beginn der Übung.