Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Christian Herrmann
Dipl.-Math. Thomas Bunke

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13.04.2010

Einführung in die Algebra
1. Übung

Gruppenübung

G 1 (Gruppen und Untergruppen)

Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$?

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$H_4 = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid det\, A > 0\}, \qquad H_5 = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid tr\, A = 0\},$$

G 2 (Monoid, Modul, Algebra)

Wir betrachten die Menge M aller Abbildungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erst als Monoid, dann als $\mathbb{R}$-Modul und schließlich als $\mathbb{R}$-Algebra.

(a) Welche Verknüpfungen auf M müssen dazu betrachtet werden?

(b) Was ist jeweils das Erzeugnis der Abbildung $id : x \mapsto x$?

G 3 (Erzeugende und Relationen)

(a) Die Gruppe G werde von zwei Elementen $a, b \in G$ erzeugt, welche die folgenden Gleichungen erfüllen: $a^4 = b^2 = 1$ und $ab = ba^3$. Zeigen Sie, dass sich jedes Element von G schreiben lässt in der Form $a^i b^j$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $j \in \{0, 1\}$. Wieviele Elemente hat G mindestens, wieviele höchstens?

(b) Es ist zu zeigen, dass die Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Relationen aus (a) erfüllen. Wieviele Elemente hat die von ihnen erzeugte Untergruppe $D_4 := \langle a, b \rangle \subseteq GL_2(\mathbb{R})$? Welche geometrische Bedeutung hat dieses Ergebnis?

G 4 (Relativistische Addition von Geschwindigkeiten)

Sei $(-1, 1)$ das offene Intervall zwischen -1 und 1. Wir definieren eine Abbildung $* : (-1, 1) \times (-1, 1) \to (-1, 1)$ durch $r * s = \frac{r+s}{1+rs}$ für $r, s \in (-1, 1)$ unter Benutzung der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$. Ist $((-1, 1), *, 0)$ eine Gruppe?

Hausübung

H 1 (Erzeuger der speziellen linearen Gruppe)

Sei $\Bbbk$ ein Körper. Zeige, dass die Gruppe $SL_n(\Bbbk)$ der $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 von den elementaren Scherungsmatrizen $E + rE_{ij}$ $(i \neq j)$ erzeugt wird. Dabei ist E_{ij} die Matrix mit 1 an der Position (i, j) und 0 sonst.
Hinweis: Stellen Sie zuerst folgende Matrizen als Produkte von Scherungsmatrizen dar:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$$

und benutzen Sie den Gauß-Algorithmus.

H 2 (Kleine Gruppen und Körper)

- Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen mit genau drei bzw. vier Elementen.
- Bestimmen Sie einen Körper mit vier Elementen. (*Hinweis:* Es gibt kein Element der Ordnung vier.)
- *Zusatz:* Zeigen Sie, dass es keinen weiteren Körper mit genau vier Elementen gibt.

H 3 (Einheiten in Monoiden)

Sei M ein endlicher Monoid.

(a) Besitzt jedes Element $a \in M$, das ein Linksinverses hat (für das also ein $b \in M$ existiert mit $ba = 1$) auch ein Rechtsinverses?

(b) Sei $a \in M$ ein Element, das ein Links- und ein Rechtsinverses besitzt. Zeigen Sie, dass es genau ein $b \in M$ mit $ab = 1 = ba$ gibt.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge aller $a \in M$, die Links- und Rechtsinverses besitzen, ein Untermonoid und eine Gruppe ist.

(d) *Zusatz:* Geben Sie ein Beispiel eines Monoids M, in dem für $a \in M$ ein Linksinverses jedoch kein Rechtsinverses existiert.

H 4 (Endlich erzeugte Moduln)

Sei $\Bbbk$ ein Körper, $A \in \Bbbk^{n \times n}$. Mit $\Bbbk[A]$ bezeichnen wir die von A erzeugte $\Bbbk$-Unteralgebra von $\Bbbk^{n \times n}$. Sei m minimal, sodass es $r_i \in \Bbbk$ gibt mit $A^m = r_0 E + r_1 A + \cdots + r_{m-1} A^{m-1}$. Zeigen Sie:

(a) $E, A, \ldots, A^{m-1}$ ist eine Basis des $\Bbbk$-Vektorraums $\Bbbk[A]$.

(b) $V = \Bbbk^n$ ist auf genau eine Art ein $\Bbbk[A]$-Modul, sodass Av für $v \in V$ wie üblich definiert ist.

(c) Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, so wird V als $\Bbbk[A]$-Modul von $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$ erzeugt und es gilt $m = n$.

Abgabe der Hausübungen: Am 27./28. April und 4./5. Mai 2010 zu Beginn der Übung.