Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
19.07.2010

Höhere Mathematik 2

Ferienübung

Aufgabe F1

a) Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x der Gleichungssysteme $A_1x = b$ und $A_2x = b$.

b) Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie alle Lösungen x der Gleichungssysteme $A_1x = b$ und $A_2x = b$.

Aufgabe F2

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ \beta \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Bringen Sie zunächst die um b erweiterte Matrix mittels des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform.

a) Wählen Sie $\alpha = 4$ und $\beta = 4$. Bestimmen Sie für diese Parameterwerte die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ und die Lösung des zugehörigen homogenen Systems $Ax = 0$.

b) Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ und $\beta = 5$ die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ und die Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

c) Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ und $\beta = 4$ die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ und die Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

Aufgabe F3

Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ ist und dass im Nullpunkt gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Sind $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ bzw. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ im Nullpunkt stetig?

Aufgabe F4

a) Berechnen Sie den Gradient folgender Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $j = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \\ f_2(x,y) &= \frac{\sin(xy)}{xy + x^3y^3}, \\ f_3(x,y) &= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

b) Untersuchen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \begin{cases} \frac{xy-1}{x-1}, & \text{falls } (x,y) \neq (1,1), \\ a_1, & \text{falls } (x,y) = (1,1), \end{cases} \\ g_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{x-y}{x-1}, & \text{falls } (x,y) \neq (1,1), \\ a_2, & \text{falls } (x,y) = (1,1). \end{cases} \end{aligned}$$

Kann man die Konstanten a_1 und a_2 so wählen, dass g_1 und g_2 auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig sind?

Aufgabe F5

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe F6

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe F7

Gegeben sind die Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinanten von A, B und $A \cdot B$.

b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen A, B und $A \cdot B$ invertierbar sind. Berechnen Sie gegebenfalls die Inverse und die Determinante der inversen Matrix.

Aufgabe F8

a) Berechnen Sie das Produkt AB für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A.

c) Invertieren Sie die Matrix A mit dem Gauß-Algorithmus.

Aufgabe F9

a) Gegeben seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen, dass A_1 positiv definit ist und dass A_2 und A_3 indefinit sind.

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3, \\ g(x,y,z) &= 1 + x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy + 6yz - 2xz, \\ h(x,y,z) &= (x + xy + yz)\exp(x). \end{aligned}$$

Aufgabe F10

Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y\sqrt{1-x} + x\sqrt{1-y}.$$

Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich von f, ∇f und H_f an.

Aufgabe F11

Bestimmen Sie, ob folgende Funktionen ein lokales Extremum in $(0,0)$ haben.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 + x^4, \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) &= (1 + \sin(x+y))\ln(1 + 2x + y) - 2x - y, \\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) &= \exp(xyz)\left(1 - \arctan(x^2 + y^2 + 2z^2)\right). \end{aligned}$$

Aufgabe F12

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) &= e^{xy}, \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) &= x + y - 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Aufgabe F13

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \quad f(x,y) &= x+y+z,\\ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \quad g(x,y) &= x^2+y^2+z^2-1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z)=0$.

Aufgabe F14

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x)+x^2y=2x^2.$$

Welche Lösung erfüllt $y(0)=5$?

Aufgabe F15

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x)=\frac{\sin y}{x}, \quad y(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}, \quad x>0$$

durch Trennung der Variablen.

Aufgabe F16

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x)-y(x)=x$$

durch Variation der Konstanten.

Aufgabe F17

Skizzieren Sie die Menge $G\subset\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie $\int_G f(x,y)\,d(x,y)$ in den Fällen

a) $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1\le x\le 2,\ 3\le y\le 5\}, \quad f(x,y)=x^2y^3.$

b) $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x,y\le 1,\ x+y\le 1\}, \quad f(x,y)=1-x-y.$

c) $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x,y\le 1,\ x^2\le y^2\le 2x^2\}, \quad f(x,y)=x+y.$

Aufgabe F18

Gegeben seien $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x,y\le 1\}$ und die Funktion $f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^2}$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar ist.

b) Berechnen Sie $\int_G f(x,y)\,d(x,y)$.

Aufgabe F19

Gegeben sei das Gebiet H, das in Polarkoordinaten durch die beiden Ungleichungen $0\le\varphi\le 2\pi$ und $0\le r\le 1+\varphi$ beschrieben wird. Zeichnen Sie H in Polarkoordinaten und das zugehörige transformierte Gebiet G in kartesischen Koordinaten.

Weiter sei folgende Funktion in kartesischen Koordinaten gegeben:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \qquad f(x,y)=x^4+2x^2y^2+y^4.$$

Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_G f(x,y)\,d(x,y).$$

Aufgabe F20

Gegeben sei das Gebiet

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0, 2] \text{ und } y \in [x, x^2 + 1]\}$$

und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3x + 2y.$$

Skizzieren Sie das Gebiet G und berechnen Sie das Integral

$$\int_G f(x, y)\, d(x, y).$$