Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
Daniel Henkel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010 14.06.2010

Höhere Mathematik 2

5. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G13
Welche der folgenden Matrizen sind

(i) positiv definit,
(ii) negativ definit,
(iii) indefinit,
(iv) positiv semidefinit,
(v) negativ semidefinit?

Begründen Sie jeweils.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G14

a) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.
Bestimmen Sie das Extremum von h. Ist es ein Maximum oder ein Minimum?

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x - 2)e^{-x+y}$.
Zeigen Sie, dass f keine Extrema besitzt.
Für welche Werte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Hesse-Matrix $H_f(x, y)$ positiv definit?

Aufgabe G15
Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) &= \exp(x + 2y), \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) &= x^2 + y^2 - 4. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.
Was beschreibt die Nebenbedingung geometrisch?

Hausübungen

Aufgabe H13

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Werte von a an, für die die Matrix A positiv definit ist.

Aufgabe H14

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$.
Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion f und bestimmen Sie, ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe H15

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) &= xy, \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) &= x^2 + 2y^2 - 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.
Was beschreibt die Nebenbedingung geometrisch?