Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
14.07.2010

7. Übungsblatt zu FGdI 2

Gruppenübung

Aufgabe G1

Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar, welche sind rekursiv aufzählbar?

(a) $\text{SAT(AL)} := \{\varphi \in \text{AL} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(b) $\{(\varphi, \psi) \in \text{AL} : \varphi \models \psi\}$

(c) $\text{SAT(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(d) $\text{VAL(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

(e) $\text{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

(f) $\text{FINSAT(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

(g) $\text{INF(FO)} := \{\varphi \in \text{FO} : \varphi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$

Geben Sie auch Beispiele an von Sätzen, die zu der Menge INF(FO) in (g) gehören.

Musterlösung:

(a) Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(b) Zugehörigkeit zu dieser Menge kann man mit Wahrheitstafeln entscheiden.

(c) Diese Menge ist nicht entscheidbar (Satz von Church und Turing, S. 37 im Skript). $L \setminus \text{SAT(FO)}$ besteht aus den Sätzen φ, die nicht erfüllbar sind, oder, anders gesagt, aus den Sätzen φ, für die $\neg\varphi$ allgemeingültig ist. Das Komplement von SAT(FO) ist also wegen des Vollständigkeitssatzes rekursiv aufzählbar. Da eine rekursiv aufzählbare Menge, deren Komplement auch rekursiv aufzählbar ist, sogar entscheidbar ist, kann SAT(FO) also nicht rekursiv aufzählbar sein.

(d) Wegen des Kompaktheitssatzes ist diese Menge rekursiv aufzählbar. Sie ist nicht entscheidbar, da eine Formel φ erfüllbar ist, genau dann wenn $\neg\varphi$ nicht allgemeingültig ist. Erfüllbarkeit ist für FO aber nicht entscheidbar.

(e) Diese Menge ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar. (Eine Formel φ ist unerfüllbar genau dann, wenn $\neg\varphi$ allgemeingültig ist, also ist diese Menge nach (d) rekursiv aufzählbar. Sie ist nach (c) nicht entscheidbar, da eine Formel unerfüllbar ist, genau dann wenn sie nicht erfüllbar ist.)

(f) Diese Menge rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar. (Sie ist rekursiv aufzählbar, da man systematisch alle endliche Modelle durchsuchen kann. Nach dem Satz von Traktenbrot (S. 37 im Skript) ist diese Menge aber nicht entscheidbar.)

(g) Diese Menge ist nicht rekursiv aufzählbar und damit auch nicht entscheidbar. (Wäre Sie rekursiv aufzählbar, dann wäre $\text{SAT(FO)} = \text{FINSAT(FO)} \cup \text{INF(FO)}$ das auch.) (Das Komplement dieser Menge besteht aus den Sätzen φ, die entweder gar keine Modelle haben oder ein endliches Modell haben: also ist das Komplement nach (e) und (f) rekursiv aufzählbar.)

Beispiele von Formeln, die zu INF(FO) gehören sind:

$$\neg\forall y \exists x (f(x) = y) \land \forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$$

oder

$$\forall y \exists x (f(x) = y) \land \neg\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y).$$

Aufgabe G2

Wir betrachten ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich durch eine Menge von FO-Formeln ausdrücken? Geben Sie eine entsprechende Formelmenge an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Der Abstand zwischen den Knoten x und y ist gerade oder unendlich.

(b) $\mathcal{G}$ enthält keinen Kreis.

(c) $\mathcal{G}$ enthält einen Kreis.

(d) Jeder Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

(e) Kein Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

Musterlösung:

(a) Wir definieren zunächst eine Formel $\varphi_n(x, y)$, die besagt, dass es einen Pfad der Länge höchstens n von x nach y gibt:

$$\varphi_0(x, y) := x = y\,, \qquad \varphi_{n+1}(x, y) := \varphi_n(x, y) \lor \exists z (Exz \land \varphi_n(z, y))\,.$$

Eine Wahl für die gesuchte Formelmenge ist:

$$\{\varphi_{2n+1}(x, y) \to \varphi_{2n}(x, y) \;:\; n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Die Menge der Sätze der folgenden Form leistet das Gewünschte:

$$\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i<k\leq n} x_i \neq x_k \land Ex_1x_2 \land \cdots \land Ex_{n-1}x_n \land Ex_nx_1 \Big)\,, \quad \text{für } n > 2\,.$$

(c) Diese Aussage lässt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \{\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \big(\textstyle\bigwedge_{i<k\leq n} x_i \neq x_k \land Ex_1x_2 \land \cdots \land Ex_{n-1}x_n \land Ex_nx_1\big) \;:\; n > 2\}$$

unerfüllbar. Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem hinreichend großen Kreis erfüllt.) Widerspruch.

(d) Die Menge der Sätze der folgenden Form leistet das Gewünschte:

$$\forall x \exists y_1 \cdots \exists y_n \Big(\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_n \land Exy_1 \land \cdots \land Exy_n)\,, \quad \text{für } n > 2\,.$$

(e) Diese Aussage lässt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \{\forall x \exists y_1 \cdots \exists y_n \big(\textstyle\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_k \land Exy_1 \land \cdots \land Exy_n\big) \;:\; n > 2\}$$

unerfüllbar. (Alternativ kann man auch eine neue Konstante c einführen und die Satzmenge

$$\Psi := \Phi \cup \{\exists y_1 \cdots \exists y_n \big(\textstyle\bigwedge_{i<k\leq n} y_i \neq y_k \land Ecy_1 \land \cdots \land Exy_n\big) \;:\; n > 2\}$$

betrachten.) Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem Baum von hinreichend großem Verzweigunsgrad erfüllt.) Widerspruch.

Aufgabe G3

(a) Geben Sie eine passende Signatur an, und drücken Sie darüber die folgenden „Tatsachen“ durch Sätze der Logik erster Stufe aus:

(i) Ein Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.

(ii) Grüne Drachen können fliegen.

(iii) Ein Drache ist grün, wenn einer seiner Elterndrachen grün ist.

(iv) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Hinweis: Überlegen Sie sich u. a., was Sie in der Signatur benötigen, um „ist Kind von“ ausdrücken zu können.

(b) Leiten sie argumentativ die vierte Aussage aus den ersten drei her.

(c) Zeigen Sie mittels dem Resolutionsverfahren, dass die vierte Aussage aus den ersten drei folgt.

Hinweis: Beachten Sie, dass man auf eine Skolemfunktion geführt wird, die ggf. „nicht fliegende Kinder“ liefert.

Musterlösung:

(a) Eine mögliche Signatur ist $S = (G, F, L, C)$, wobei G (green), F (can fly) und H (happy) einstellige Relationssymbole sind, und C (child of) ein zweistelliges Relationssymbol ist. Obige Aussagen entsprechen folgenden FO(S)-Sätzen:

(i) $\varphi_1 := \forall x(\forall y(Cyx \rightarrow Fy) \rightarrow Hx)$

(ii) $\varphi_2 := \forall x(Gx \rightarrow Fx)$

(iii) $\varphi_3 := \forall x(\exists y(Cxy \wedge Gy) \rightarrow Gx)$

(iv) $\varphi_4 := \forall x(Gx \rightarrow Hx)$

(b) Angenommen g ist ein grüner Drache, und c ist ein Kind von g. Dann ist c grün (wegen (iii)) und kann damit auch fliegen (wegen (ii)). Also können alle Kinder von g fliegen, also ist g (wegen (i)) glücklich.

(c) Wir wollen zeigen, dass die Satzmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ unerfüllbar ist. Dazu bringen wir diese Sätze in Skolennormalform:

(i) $\forall x(\forall y(Cyx \rightarrow Fy) \rightarrow Hx) \equiv \forall x \exists y((Cyx \rightarrow Fy) \rightarrow Hx)$
Skolemnormalform: $\forall x((Cfxx \rightarrow Ffx) \rightarrow Hx)$.

(ii) Ist bereits in Skolemnormalform: $\forall x(Gx \rightarrow Fx)$

(iii) $\forall x(\exists y(Cxy \wedge Gy) \rightarrow Gx) \equiv \forall x \forall y((Cxy \wedge Gy) \rightarrow Gx)$
Skolemnormalform: $\forall x \forall y((Cxy \wedge Gy) \rightarrow Gx)$.

(iv) $\neg\forall x(Gx \rightarrow Hx) \equiv \exists x(Gx \wedge \neg Hx)$
Skolemnormalform: $Gc \wedge \neg Hc$.

Es ergibt sich die folgende Klauselmenge:

$$\begin{array}{cl} \{Cfxx, Hx\}, \{\neg Ffx, Hx\} & \text{von (i)} \\ \{\neg Gx, Fx\} & \text{von (ii)} \\ \{\neg Cxy, \neg Gy, Gx\} & \text{von (iii)} \\ \{Gc\}, \{\neg Hc\} & \text{von (iv)} \end{array}$$

Damit lässt sich zum Beispiel wie folgt die leer Klausel ableiten:

$$\begin{tikzcd}
\{Cfcc, Hc\} \arrow[dr] & \{\neg Hc\} \arrow[d] & & & \\
\{\neg Cfcc, \neg Gc, Gfc\} \arrow[dr] & \{Cfcc\} \arrow[d] & & \{\neg Ffc, Hc\} \arrow[d] & \{\neg Hc\} \arrow[dl] \\
\{Gc\} \arrow[dr] & \{\neg Gc, Gfc\} \arrow[d] & & \{\neg Ffc\} \arrow[d] & \{\neg Gfc, Ffc\} \arrow[dl] \\
& \{Gfc\} \arrow[dr] & & \{\neg Gfc\} \arrow[dl] & \\
& & \square & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe G4

Zeigen Sie, dass wenn T_1 und T_2 zwei Theorien sind, so dass $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, es einen Satz σ gibt, so dass $T_1 \models \sigma$ und $T_2 \models \neg\sigma$.

Musterlösung:

Wenn $T_1 \cup T_2$ keine Modelle hat, gibt es, nach dem Kompaktheitssatz, schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq T_1 \cup T_2$ die keine Modelle hat. Sei $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_1\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \in T_2\}$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Klar ist, dass $T_1 \models \sigma$, also haben wir nur noch zu beweisen, dass $T_2 \models \neg\sigma$.

Nehmen wir an, dass $T_2 \not\models \neg\sigma$, also dass es ein Modell $\mathcal{M}$ gibt, so dass $\mathcal{M} \models T_2$ und $\mathcal{M} \models \sigma$. Dann $\mathcal{M} \models \Gamma_2$, weil $\Gamma_2 \subseteq T_2$ und $\mathcal{M} \models T_2$, und $\mathcal{M} \models \Gamma_1$, weil $\mathcal{M} \models \sigma$ und $\sigma = \bigwedge \Gamma_1$. Das widerspricht der Annahme, dass $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ keine Modelle hat. Also $T_2 \models \neg\sigma$.

Aufgabe G5

Beweisen Sie die gegebene Folgerungsbeziehung sowohl im Sequenzenkalkül als auch durch Resolution.

$$\forall x \neg P(x), \neg\forall x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \models \exists x Q(x)$$

Musterlösung:

Die Folgerungsbeziehung gilt gdw. wenn sich die Sequenz $\forall x \neg Px, \neg\forall x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx$ im Sequenzenkalkül ableiten lässt:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\neg Pc \vdash \neg Pc, Qc$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\neg Pc, Qc \vdash Qc$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$\neg Pc \vdash \neg Qc, Qc$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\BinaryInfC{$\neg Pc \vdash \neg Pc \wedge \neg Qc, Qc$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$\forall x \neg Px \vdash \neg Pc \wedge \neg Qc, Qc$}
\RightLabel{($\exists$R)}
\UnaryInfC{$\forall x \neg Px \vdash \neg Pc \wedge \neg Qc, \exists x Qx$}
\RightLabel{($\forall$R)}
\UnaryInfC{$\forall x \neg Px \vdash \forall x(\neg Px \wedge \neg Qx), \exists x Qx$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$\forall x \neg Px, \neg\forall x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx$}
\end{prooftree}$$

Die Folgerungsbeziegung gilt, wenn

$$\forall x \neg Px, \neg\forall x(\neg Px \wedge \neg Qx), \neg\exists x Qx$$

nicht erfüllbar ist. Um das zu beweisen, reicht es die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\{\neg Px\}, \{Pc, Qc\}, \{\neg Qx\}$$

zu zeigen, indem man daraus mit Resolution die leere Klausel ableitet:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Pc\} \arrow[dr] & \{Pc, Qc\} \arrow[d] & \\
 & \{Qc\} \arrow[dr] & \{\neg Qc\} \arrow[d] \\
 & & \Box
\end{tikzcd}$$

Aufgabe G6

Sei S eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält und wofür die Menge der geschlossenen Termen $T_0(S)$ unendlich ist.

(a) Zeigen Sie, dass es keine Menge Φ von S-Sätzen gibt, so dass Φ genau dann wahr ist in einer S-Struktur $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A}$ ein Herbrandmodell ist.

Hinweis: Betrachten Sie erst den Spezialfall $S = (c, f)$ (eine Konstante c und ein einstelliges Funktionssymbol f).

(b) Folgern Sie aus (a), dass es keine S-Formel $\psi(x)$ geben kann, so dass

$$(\mathcal{A}, \beta[x \mapsto a]) \models \psi(x)$$

gilt, genau dann wenn a die Interpretation von einem variablenfreien Term ist.

Musterlösung:

(a) Nehmen wir an, dass es eine Satzmenge Φ gibt, so dass Φ genau durch die Herbrandmodelle erfüllt wird. Sei $\mathcal{H}$ ein Herbrandmodell für die Signatur S. Wir erweitern die Signatur S um einem neuen Konstantensymbol d und bekommen die Signatur S'. Betrachten Sie die S'-Menge:

$$\Psi = \Phi \cup \{\neg d = t \ : \ t \in T_0(S)\}.$$

Für jede endliche Teilmenge Ψ_0 von Ψ gibt es einen Term $t \in T_0(S)$, der nicht in Ψ_0 vorkommt: Ψ_0 enthält nur endliche viele Elemente aus $T_0(S)$ und $T_0(S)$ ist unendlich. Also wird Ψ_0 von $\mathcal{H}$ erfüllt, falls wir d als eine solche t interpretieren. Also ist jede endliche Teilmenge von Ψ erfüllbar und damit Ψ selbst auch (nach dem Kompaktheitssatz). Sei $\mathcal{A}$ also ein S'-Modell von Ψ: wenn wir die Interpretation von d "vergessen", können wir $\mathcal{A}$ auch als eine S-Struktur auffassen. Dann soll $\mathcal{A}$ einerseits ein Herbrandmodell sein, da es Ψ und deshalb auch Φ erfüllt; andererseits enthält $\mathcal{A}$ ein Element $d^{\mathcal{A}}$ verschieden von allen Interpretationen von geschlossenen S-Termen und ist damit kein Herbrandmodell. Widerspruch!

Wir schliessen, dass es eine solche Satzmenge Φ nicht geben kann.

(b) Wenn es eine Formel $\psi(x)$ gäbe, die genau von den Elementen wahr gemacht wird, die Interpretationen von geschlossenen Termen sind, dann würde

$$\Phi = \{\forall x \psi(x)\} \cup \{\neg s = t \ : \ s, t \in T_0(S), s \neq t\}$$

genau in den S-Strukturen gelten, die Herbrandmodelle sind. So etwas kann es aber nach (a) nicht geben, also existiert eine solche Formel $\psi(x)$ nicht.

Aufgabe G7

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \exists y (R(x,y) \wedge (P(x) \to Q(y)) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \\
\varphi_3 &:= \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \wedge Q(y) \to R(y,x)) \\
\varphi_4 &:= \neg \exists x \exists y (R(x,y) \wedge P(x) \wedge P(y))
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie jetzt mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(d) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies alle vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Musterlösung:

(a) Für φ_1 führen wir ein einstelliges Funktionssymbol f ein und für φ_3 ein Konstantensymbol c:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\rightsquigarrow \forall x (Rxfx \wedge (Px \to Qfx)) \\
\varphi_2 &\rightsquigarrow \forall x \forall y (Rxy \to \neg Ryx) \\
\varphi_3 &\rightsquigarrow \forall y (Pc \wedge ((\neg Py \wedge Qy) \to Ryc)) \\
\varphi_4 &\rightsquigarrow \forall x \forall y \neg (Rxy \wedge Px \wedge Py)
\end{aligned}$$

(b) Es genügt zu zeigen, dass die Skolem-Normalformen von φ_1 bis φ_4 nicht gleichzeitig erfüllbar sind.

Nehmen wir an, dass $\mathcal{A}$ ein Modell wäre. Es ist hilfreich $\mathcal{A}$ als einen Graph zu betrachten, wobei $R^{\mathcal{A}}$ die Kantenrelation ist und $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$ Eigenschaften der Knoten.

Da $c^{\mathcal{A}}$ nach φ_3 die Eigenschaft $P^{\mathcal{A}}$ hat und $\mathcal{A} \models Rcfc$ gilt (φ_1), muss $f^{\mathcal{A}}c^{\mathcal{A}}$ nach φ_1 die Eigenschaft $Q^{\mathcal{A}}$ haben, aber kann es (nach φ_4) nicht die Eigenschaft $P^{\mathcal{A}}$ haben. Dann gilt nach φ_3, dass $\mathcal{A} \models Rfcc$, was $\mathcal{A} \models Rcfc$ und φ_2 widerspricht.

Wir schliessen, dass es keine Modelle von $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ gibt.

(c) Wir haben folgende Klauselmenge:

$$\{Rxfx\}, \{\neg Px, Qfx\}, \{\neg Rxy, \neg Ryx\}, \{Pc\}, \{Py, \neg Qy, Ryc\}, \{\neg Rxy, \neg Px, \neg Py\}.$$

Damit kann mit z.B. wie folgt die leere Klausel ableiten:

$\{Pc\}$, $\{\neg Rcfc, \neg Pc, \neg Pfc\}$ $\to$ $\{\neg Rcfc, \neg Pfc\}$

$\{Rcfc\}$, $\{\neg Rcfc, \neg Pfc\}$ $\to$ $\{\neg Pfc\}$

$\{Pfc, \neg Qfc, Rfcc\}$, $\{\neg Pfc\}$ $\to$ $\{\neg Qfc, Rfcc\}$

$\{\neg Pc, Qfc\}$, $\{Pc\}$ $\to$ $\{Qfc\}$

$\{\neg Qfc, Rfcc\}$, $\{Qfc\}$ $\to$ $\{Rfcc\}$

$\{\neg Rcfc, \neg Rfcc\}$, $\{Rcfc\}$ $\to$ $\{\neg Rfcc\}$

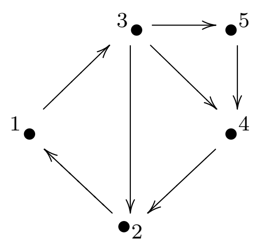
$\{Rfcc\}$, $\{\neg Rfcc\}$ $\to$ $\square$

(d) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an.

- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n c \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^{n+1} c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = T$.
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^{n+1} c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = \{c\}$ und $Q^{\mathcal{H}} = T$.
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(f^n c, f^{n+1} c) \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^n c, c) \,:\, n > 0\}$.
  $P^{\mathcal{H}} = \{c\}$ und $Q^{\mathcal{H}} = T$.
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{c\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \emptyset$.
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = \{c\}$.

Aufgabe G8

Betrachten Sie den folgenden gerichteten Graphen:



Wir nehmen an, dass die Knoten 2 und 3 blau gefärbt sind und die anderen nicht. Wir betrachten dazu folgende Formel:

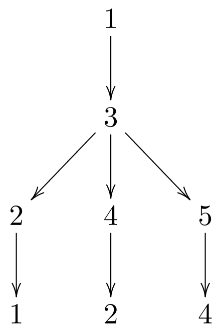
$$\varphi(v) :\equiv \forall z(Rvz \to \exists y(Rzy \wedge \forall x(Ryx \to Bx))).$$

Für welche $v \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gilt diese Formel $\varphi(v)$ in dem Graphen, falls wir R als die Kantenrelation und B als die Menge der blaugefärbte Knoten interpretieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe des Semantikspiels und zeichnen Sie dazu geeignete Spielbäume.
Bemerkung: $\varphi(v)$ ist im wesentlichen die Übersetzung in FO von einer Modallogische Formel (welche?). Siehe Seiten 49–52 im Skript, insbesondere Übung 8.22.

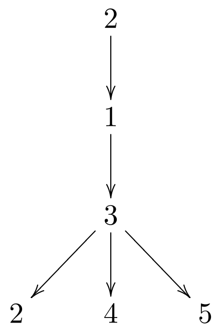
Musterlösung:
Erst bringen wir die Formel in PNF:

$$\varphi(v) \equiv \forall z \exists y \forall x(Rvz \to (Rzy \wedge (Ryx \to Bx))).$$

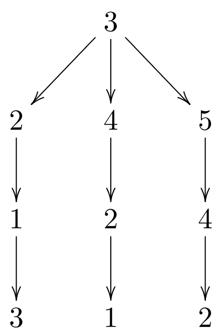
Wegen der Form der Formel brauchen wir uns nur die z anzugucken, die mit v verbunden sind, nur die y, die mit z verbunden sind, und nur die x, die mit y verbunden sind (da ein Spieler, der etwas anderes wählt, sowieso verliert).
Also haben wir für $v = 1$ folgenden Spielbaum:



Hier hat der Verifizierer eine Gewinnstrategie: da der Falsifizierer nur $z = 3$ spielen kann, kann sie $y = 4$ wählen, wonach der Falsifizierer wieder keine Wahl hat und $x = 2$ spielen muss. Da 2 blau ist, gewinnt der Verifizierer und es gilt $\varphi(1)$.
Für $v = 2$:



Hier hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie: er kann im letzten Zug $x = 4$ oder $x = 5$ wählen und somit gewinnen. Also gilt $\varphi(2)$ nicht.
Für $v = 3$:



Hier gewinnt der Falsifizierer indem er im ersten Zug $z = 4$ wählt. Also gilt $\varphi(3)$ nicht.
Für $v = 4$:

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[d] \\ 2 \arrow[d] \\ 1 \arrow[d] \\ 3 \end{tikzcd}$$

Hier gibt es nur einen möglichen Spielverlauf, wonach der Verifizierer gewinnt. Also gilt $\varphi(4)$.
Für $v = 5$:

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[d] \\ 4 \arrow[d] \\ 2 \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd}$$

Hier gibt es auch nur einen möglichen Spielverlauf, wonach aber jetzt der Falsifizierer gewinnt. Also gilt $\varphi(5)$ nicht.
Wir schliessen, dass $\varphi(v)$ nur für $v = 1, 4$ gilt.