Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
07.07.2010

6. Übungsblatt zu FGdI 2

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(i) $\forall x \forall y (Rxy \vee Py),\ \exists x \neg Px \vdash \exists x \forall y Ryx$

(ii) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = x)), \forall x (Q(x) \rightarrow P(x)) \vdash \exists x \forall y (Q(y) \rightarrow y = x)$

(iii) $\vdash \exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$

(b) Beweisen Sie *semantisch* die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta, \psi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x(\varphi \rightarrow \psi)} \qquad \text{wobei } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta, \varphi, \psi \text{ vorkommt.}$$

(c) Was geht schief, wenn man in den Regeln ($\forall$R) und ($\exists$L) die Bedingung weglässt, dass die Konstante nirgendwo vorkommt? Finden sie eine ungültige Sequenz, die man mit den inkorrekten, zu starken Regeln ableiten könnte.

(d) Beweisen Sie *semantisch* die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy}$$

Beachten Sie, dass sich diese Regel nicht in $\mathcal{SK}^{\neq}$ (auch nicht in $\mathcal{SK}$) herleiten lässt (warum?).

Aufgabe G2

(a) Für eine Klasse L von FO-Sätzen gelte die folgende „Endliche-Modell-Eigenschaft“: Jeder erfüllbare Satz $\varphi \in L$ hat ein endliches Modell.

Argumentieren Sie, dass Erfüllbarkeit für Sätze aus L entscheidbar ist.

Hinweis: Man erinnere sich, dass eine Menge entscheidbar ist, falls man die Menge selbst und auch ihr Komplement aufzählen kann (warum?). Diesen Sachverhalt kann man für $\mathrm{SAT}(L)$ und $L \setminus \mathrm{SAT}(L)$ ausnutzen.

(b) Zeigen Sie, dass Erfüllbarkeit für universell-pränexe FO-Sätze in einer Symbolmenge ohne Funktionssymbole (nur Relationen und Konstanten) entscheidbar ist.

Hinweis: Man überlege sich, zunächst für Sätze ohne Gleichheit, wie deren Herbrand-Modelle aussehen.

Aufgabe G3

Seien R und E zweistellige Relationssymbole und Φ die Formelmenge:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \forall x Exx\,, \\
&(2) \quad \forall x \forall y (Exy \to Eyx)\,, \\
&(3) \quad \forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Eyz) \to Exz)\,, \\
&(4) \quad \forall x \forall y (\neg Exy \to \exists z (\neg Exz \wedge \neg Eyz \wedge Rxz \wedge \neg Ryz))\,, \\
&(5) \quad \forall x \forall y (Rxy \to Ryx)\,, \\
&(6) \quad \forall x \forall y (Exy \to \neg Rxy)\,, \\
&(7) \quad \forall x \exists y Rxy\,, \\
&(8) \quad \exists x \forall y (\neg Exy \to Rxy)\,.
\end{aligned}
$$

(a) (1)–(3) besagen, dass E eine Äquivalenzrelation ist. Was ist die anschauliche Bedeutung der Formeln (4)–(8), wenn man E als (Modellierung der) Gleichheit betrachtet? Können Sie ein kleinstmögliches Modell von (1)–(7) angeben?

(b) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.