Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
30.06.2010

5. Übungsblatt zu FGdI 2

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Zeigen Sie mit dem Resolutionskalkül, dass die folgenden Formelmengen unerfüllbar sind:

(i) $\{\,(p \vee q) \to x, (x \vee y) \to z, p \vee q \vee y, \neg z\,\}$

(ii) $\{\,\forall x \forall y(Rxy \to (Px \wedge \neg Py)), \forall x \forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy)), \forall x Rxfx\,\}$

(iii) $\{\,\forall x \forall y \forall z(Rxy \vee Rxz \vee Ryz), \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),$
$\forall x \forall y(Rxy \to Rfxfy), \forall x \neg Rxffx\,\}$

(b) Untersuchen Sie für jede der obigen Formelmengen, ob es auch echte Teilmengen gibt, die schon unerfüllbar sind.

Musterlösung:

(a) (i) Klauseln: $\{\neg p, x\}, \{\neg q, x\}, \{\neg x, z\}, \{\neg y, z\}, \{p, q, y\}, \{\neg z\}$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg z\} \arrow[dr] & \{\neg y, z\} \arrow[d] & \{\neg x, z\} \arrow[dr] & \{\neg z\} \arrow[d] & \\
\{p,q,y\} \arrow[dr] & \{\neg y\} \arrow[d] & \{\neg q, x\} \arrow[d] & \{\neg x\} \arrow[dl] \arrow[dd] & \{\neg p, x\} \arrow[ddl] \\
 & \{p,q\} \arrow[dr] & \{\neg q\} \arrow[d] & & \\
 & & \{p\} \arrow[d] & \{\neg p\} \arrow[dl] & \\
 & & \square & &
\end{tikzcd}$$

(ii) Die zweite Formel hat folgende Skolemnormalform: $\forall x \forall y(Rxy \to Rxg(x,y) \wedge Rg(x,y)y)$
Klauseln: $\{\neg Rxy, Px\}, \{\neg Rxy, \neg Py\}, \{\neg Rxy, Rxg(x,y)\}, \{\neg Rxy, Rg(x,y)y\}, \{Rxfx\}$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg Rxfx, \neg Pfx\} \arrow[dr] & \{Rxfx\} \arrow[d] & \{Rfxffx\} \arrow[d] & \{\neg Rfxffx, Pfx\} \arrow[dl] \\
 & \{\neg Pfx\} \arrow[d] & \{Pfx\} \arrow[dl] & \\
 & \square & &
\end{tikzcd}$$

Achtung: Dies ist das verallgemeinerte Resultionsverfahren. Im GI-Resultionsverfahren (wie es im Skript eingeführt wurde) müssten die Variablen durch Konstanten ersetzt werden. Konkret müsste hier c anstatt x geschrieben werden.
Wir verenden das verallgemeinerte Verfahren auch in den folgenden Aufgaben.

(iii) Klauseln: $\{Rxy, Rxz, Ryz\}$, $\{\neg Rxy, \neg Ryz, Rxz\}$, $\{\neg Rxy, Rfxfy\}$, $\{\neg Rxffx\}$

$$\begin{tikzcd}
 & \{\neg Rxffx\} \arrow[dr] & \{\neg Rxfx, \neg Rfxffx, Rxffx\} \arrow[d] \\
\{\neg Rxfx, Rfxffx\} \arrow[dr] & & \{\neg Rxfx, \neg Rfxffx\} \arrow[dl] \\
\{Rxfx, Rxffx, Rfxffx\} \arrow[dr] & \{\neg Rxfx\} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & \{Rxffx, Rfxffx\} \arrow[d] & \{\neg Rfxffx\} \arrow[dl] \\
\{\neg Rxffx\} \arrow[dr] & \{Rxffx\} \arrow[d] & \\
 & \Box &
\end{tikzcd}$$

Oder:

$$\begin{tikzcd}
\{Rxfx, Rxffx, Rfxffx\} \arrow[dr] & \{\neg Rxffx\} \arrow[d] & \\
\{\neg Rxfx, Rfxffx\} \arrow[dr] & \{Rxfx, Rfxffx\} \arrow[d] & \\
 & \{Rfxffx\} \arrow[d] \arrow[dddr, bend left] & \\
\{\neg Rfxffx, \neg Rffxfffx, Rfxfffx\} \arrow[dr] & \{Rffxfffx\} \arrow[d] & \\
 & \{\neg Rfxffx, Rfxfffx\} \arrow[dr] & \\
 & \{\neg Rfxfffx\} \arrow[dr] & \{Rfxfffx\} \arrow[d] \\
 & & \Box
\end{tikzcd}$$

(b) Die Formelmengen in (i) und (iii) haben nur echte Teilmengen die erfüllbar sind (insbesondere ist $\{\, \forall x \forall y \forall z(Rxy \vee Rxz \vee Ryz), \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \forall x \neg Rxffx \,\}$ erfüllbar: wir nehmen z.B. die natürliche Zahlen als Trägermenge und interpretieren f als die Nachfolgerfunktion $f(x) = x + 1$ und R wie folgt:

$$(x, y) \in R \text{ gdw. } (x \in P \Leftrightarrow y \in P),$$

wobei $P = \{0, 1, 4, 5, 8, 9, \ldots\}$.)
In (ii) ist $\{\, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)), \forall x Rxfx \,\}$ schon unerfüllbar, wie wir oben gezeigt haben.

Aufgabe G2

Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(i) $\forall x Rx\,fx \vdash \exists x Rfx\,ffx$.

(ii) $\forall x f(x,x) = x \vdash \forall x(Px \vee \neg Pf(x,x))$.

(iii) $\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy$.

(iv) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \psi$, vorausgesetzt, dass $x \notin \text{frei}(\psi)$.

(v) $\forall x(Px \to Pfx) \vdash \forall x(Px \to Pffx)$.

Musterlösung:

(i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x Rxfx, Rfcffc \vdash Rfcffc, \exists x Rfxffx}\;(\text{Ax})}{\forall x Rxfx \vdash Rfcffc, \exists x Rfxffx}\;(\forall\text{L})}{\forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx}\;(\exists\text{R})$$

(ii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x fxx = x, fcc = c, Pfcc, Pc \vdash Pc, \forall x(Px \vee \neg Pfxx)}\;(\text{Ax})}{\forall x fxx = x, fcc = c, Pfcc \vdash Pc, \forall x(Px \vee \neg Pfxx)}\;(\text{Sub-L})}{\forall x fxx = x, Pfcc \vdash Pc, \forall x(Px \vee \neg Pfxx)}\;(\forall\text{L})}{\forall x fxx = x \vdash Pc, \neg Pfcc, \forall x(Px \vee \neg Pfxx)}\;(\neg\text{R})}{\forall x fxx = x \vdash Pc \vee \neg Pfcc, \forall x(Px \vee \neg Pfxx)}\;(\vee\text{R})}{\forall x fxx = x \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx)}\;(\forall\text{R})$$

(iii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y \forall x Rxy, \forall x Rxb, Rab \vdash Rab, \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\;(\text{Ax})}{\exists y \forall x Rxy, \forall x Rxb \vdash Rab, \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\;(\forall\text{L})}{\exists y \forall x Rxy, \forall x Rxb \vdash \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\;(\exists\text{R})}{\exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Ray, \forall x \exists y Rxy}\;(\exists\text{L})}{\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy}\;(\forall\text{R})$$

(iv) Beachte, dass $\psi(c/x) = \psi$ ist, da $x \notin \text{frei}(\psi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \forall x\varphi, \psi, \forall x\psi}\;(\text{Ax}) \qquad \dfrac{}{\forall x(\varphi \vee \psi), \psi \vdash \varphi(c/x), \forall x\varphi, \psi, \forall x\psi}\;(\text{Ax})}{\forall x(\varphi \vee \psi), \varphi(c/x) \vee \psi \vdash \varphi(c/x), \forall x\varphi, \psi, \forall x\psi}\;(\vee\text{L})}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(c/x), \forall x\varphi, \psi, \forall x\psi}\;(\forall\text{L})}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x\varphi, \psi, \forall x\psi}\;(\forall\text{R})}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x\varphi, \forall x\psi}\;(\forall\text{R})}{\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x\varphi \vee \psi}\;(\vee\text{R})$$

(v)

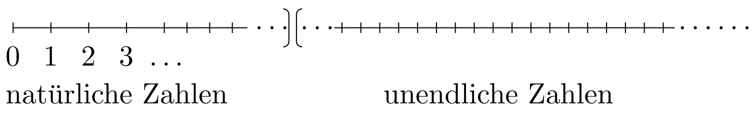
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Pa \vdash Pa, Pfa, Pffa}\;(\text{Ax})}{Pa, \neg Pa \vdash Pfa, Pffa}\;(\neg\text{L}) \qquad \dfrac{}{Pa, Pfa \vdash Pfa, Pffa}\;(\text{Ax})}{Pa, \neg Pa \vee Pfa \vdash Pfa, Pffa}\;(\vee\text{L})}{Pa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pfa, Pffa}\;(\forall\text{L})}{Pa, \neg Pfa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa}\;(\neg\text{L}) \qquad \dfrac{}{Pa, Pffa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa}\;(\text{Ax})}{Pa, \neg Pfa \vee Pffa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa}\;(\vee\text{L})}{Pa, \forall x(Px \to Pfx) \vdash Pffa}\;(\forall\text{L})}{\forall x(Px \to Pfx) \vdash \neg Pa, Pffa}\;(\neg\text{R})}{\forall x(Px \to Pfx) \vdash \neg Pa \vee Pffa}\;(\vee\text{R})}{\forall x(Px \to Pfx) \vdash \forall x(Px \to Pffx)}\;(\forall\text{R})$$

Aufgabe G3

Sei $S = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ die Signatur der Arithmetik und und $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$ das Modell der natürlichen Zahlen. Dieses Modell wird auch *Standardmodell* genannt. Weiterhin sei

$$T = Th(\mathcal{N})$$

die Menge der FO(S)-Sätze über der Signatur S, die wahr sind in $\mathcal{N}$. Wie in der Vorlesung besprochen (siehe Skript 4.3) beschreibt T das Modell $\mathcal{N}$ nicht eindeutig, d.h. es gibt auch anderen Modelle von T. Solche Modelle werden *Nichtstandardmodelle* genannt.
Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass jedes Nichtstandardmodell eine Kopie von $\mathcal{N}$ enthält. Wir zeigen weiter, dass jedes Element, das nicht zu dieser Kopie von $\mathcal{N}$ gehört, größer ist als jedes Element in dieser Kopie, d.h. dass diese Zahlen „unendlich“ sind. Nichtstandardmodelle haben damit die Form:



Sei nun ${}^*\mathcal{N} = ({}^*\mathbb{N}, +^{{}^*\mathbb{N}}, \cdot^{{}^*\mathbb{N}}, <^{{}^*\mathbb{N}}, 0^{{}^*\mathbb{N}}, 1^{{}^*\mathbb{N}})$ ein Nichtstandardmodell. Betrachten Sie die Abbildung

$$^*(-) : \mathbb{N} \to {}^*\mathbb{N} : n \mapsto {}^*n = \begin{cases} 0^{{}^*\mathbb{N}} & \text{wenn } n = 0 \\ (\underbrace{1^{{}^*\mathbb{N}} +^{{}^*\mathbb{N}} 1^{{}^*\mathbb{N}} +^{{}^*\mathbb{N}} \ldots +^{{}^*\mathbb{N}} 1^{{}^*\mathbb{N}}}_{n-\text{mal}}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung $^*(-)$ ein injektiver Homomorphismus ist, d.h. dass die Abbildung die Interpretationen der Konstanten $0, 1$ in $\mathcal{N}$ auf die entsprechenden Interpretationen in ${}^*\mathcal{N}$ abbildet, und dass die Operationen $+, \cdot$ und die Ordnung $<$ erhalten werden.

Das Bild von $^*(-)$ verhält sich also wie $\mathcal{N}$ und ist damit eine Kopie von $\mathcal{N}$ in ${}^*\mathcal{N}$.

Hinweis: Verwenden Sie hier und in den nächsten Teilaufgaben, dass alles, was in $\mathcal{N}$ wahr ist *und sich durch einen Satz in der Logik 1. Stufe ausdrücken lässt*, auch in ${}^*\mathcal{N}$ wahr ist und umgekehrt.

(b) Zeigen Sie, dass alle Elemente, die nicht im Bild von $^*(-)$ liegen, größer als jedes ${}^*n$ (für $n \in \mathbb{N}$) sein müssen.

Diese Elemente von ${}^*\mathcal{N}$ sind die *unendlichen* Zahlen.

(c) Zeigen Sie, dass es für jedes unendliches Element x in ${}^*\mathbb{N}$ ein anderes unendliches Element y gibt, so dass $2y \leq x$.

Musterlösung:

(a) Die Bilder von $0^{\mathbb{N}}$ und $1^{\mathbb{N}}$ sind per Definition $0^{{}^*\mathbb{N}}$ bzw. $1^{{}^*\mathbb{N}}$.

Um die Erhaltung der Operationen und der Ordnung zu beweisen, benutzen wir folgende Schreibweise: Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Term

$$\underline{n} := \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 0 \\ (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dass die Operation $+$ von $^*(-)$ erhalten wird, zeigen wir unter Zuhilfenahme der Sätze $\varphi_{m,n,k} := \underline{m} + \underline{n} = \underline{k}$ für $m, n, k \in \mathbb{N}$. Beachte, dass $\mathcal{N} \models \varphi_{m,n,k}$ genau dann, wenn $m + n = k$ in den natürlichen Zahlen gilt. Es gilt

$${}^*m +^{{}^*\mathbb{N}} {}^*n = {}^*k \iff {}^*\mathcal{N} \models \underline{m} + \underline{n} = \underline{k} \iff \mathcal{N} \models \underline{m} + \underline{n} = \underline{k} \iff m + n = k \text{ in } \mathbb{N}.$$

Analog zeigt man dies für $\cdot$ und $<$.
Der Homomorphismus ist injektiv, weil für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \neq m \iff \mathcal{N} \models \neg \underline{n} = \underline{m} \iff {}^*\mathcal{N} \models \neg \underline{n} = \underline{m} \iff {}^*n \neq {}^*m.$$

(b) $\mathcal{N} \models \forall x \forall y(x < y \lor y > x \lor x = y)$, also ist auch ${}^*\mathcal{N}$ eine lineare Ordnung. Neue Elemente sind deshalb entweder kleiner als 0, liegen zwischen ${}^*n$ und ${}^*(n+1)$ oder sind größer als alle ${}^*n$. Die ersten beiden Fälle sind unmöglich, da die Sätze $\neg\exists x x < 0$ und $\neg\exists x(\underline{n} < x \land x < \underline{n+1})$ in $\mathcal{N}$ erfüllt sind und deshalb auch in ${}^*\mathcal{N}$ erfüllt sein müssen.

(c) $\mathcal{N}$ erfüllt den Satz $\forall x \exists y(y + y = x \lor (y + y) + 1 = x)$, also muss dieser auch in ${}^*\mathcal{N}$ wahr sein. Also gibt es für jedes unendliches Element $x \in {}^*\mathbb{N}$ ein Element $y \in {}^*\mathbb{N}$, so dass $y +^{{}^*\mathbb{N}} y = x$ oder $(y +^{{}^*\mathbb{N}} y) +^{{}^*\mathbb{N}} 1^{{}^*\mathbb{N}} = x$. Dieses Element y muss unendlich sein, da sonst auch $y +^{{}^*\mathbb{N}} y$ und $(y +^{{}^*\mathbb{N}} y) +^{{}^*\mathbb{N}} 1$ endlich wären.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph (ohne Schleifen, d.h. es gibt keine Kante von einem Knoten zu sich selbst).
Wir nennen G 3-*färbbar,* wenn es eine Abbildung $f \colon V \to \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$.

(a) Erstellen Sie eine Formelmenge $\Phi(G)$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn G 3-färbbar ist.
Hinweis: Führen Sie zu jedem Knoten $v \in V$ eine Konstante c_v ein und zu jeder Farbe $i \in \{1, 2, 3\}$ ein Prädikat P_i.
Zusatz: Überlegen Sie sich auch wie eine solche Satzmenge in AL aussieht.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass ein Graph G genau dann 3-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist. ($H = (V_0, E_0)$ ist ein Teilgraph von G, wenn $V_0 \subseteq V$ und $E_0 \subseteq E$ ist.)

Musterlösung:

(a) Wir führen zu jedem Knoten $v \in V$ eine Konstante c_v ein, zu jeder Farbe $i \in \{1, 2, 3\}$ ein Prädikat P_i und eine Kantenrelation E.

$$\begin{aligned}\Phi(G) \;:=\; & \{\, \forall x\big((P_1x \lor P_2x \lor P_3x) \land \neg(P_1x \land P_2x) \land \neg(P_1x \land P_3x) \land \neg(P_2x \land P_3x)\big) \,\} \cup \\ & \{\, Ec_uc_v \mid (u, v) \in E \,\} \cup \{\, \neg c_u = c_v \mid u, v \in V, u \neq v \,\} \cup \\ & \{\, \forall xy\big(Exy \to \neg((P_1x \land P_1y) \lor (P_2x \land P_2y) \lor (P_3x \land P_3y))\big) \,\}\end{aligned}$$

(b) Eine Färbung $f : V \to \{1, 2, 3\}$ von G liefert Färbungen $f|_{V_0} : V_0 \to \{1, 2, 3\}$ jedes endlichen Teilgraphen (V_0, E_0) von G.
Umgekehrt nehmen wir an, dass jeder endliche Teilgraph 3-färbbar ist. Um zu zeigen, dass dann auch G 3-färbbar ist, reicht es nach (a), die Erfüllbarkeit von $\Phi(G)$ nachzuweisen. Dazu benutzen wir den Kompaktheitssatz. Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi(G)$ eine endliche Teilmenge. Sei $V_0 \subseteq V$ die Menge der Knoten von G, die in Φ_0 erwähnt werden. Dann ist V_0 endlich und $\Phi_0 \subseteq \Phi(H)$, wobei $H := (V_0, E_0)$ der Teilgraph von G ist mit $E_0 := E \cap (V \times V)$. Nach Annahme ist H 3-färbbar. Also ist $\Phi(H)$ und damit auch Φ_0 erfüllbar. Wir haben gezeigt, dass jede endliche Teilmenge von $\Phi(G)$ erfüllbar ist. Nach dem Kompaktheitssatz ist deshalb auch $\Phi(G)$ erfüllbar.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Beweisen Sie die gegebene Folgerungsbeziehung sowohl im Sequenzenkalkül als auch durch Resolution.

$$\forall x \forall y(Rxy \to (Px \land \neg Py)) \models \exists x \forall y \neg(Rxy \land Ryx)$$

Musterlösung:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, \neg Rba \vee (Pb \wedge \neg Pa) \vdash Rab$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, \neg Rab, \neg Rba \vee (Pb \wedge \neg Pa) \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, Pa \wedge \neg Pb, \vdash Rba$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, Pa \wedge \neg Pb, \neg Rba \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, Pa, Pb, \neg Pa \vdash Pb$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, Pa, \neg Pb, Pb, \neg Pa \vdash$}
\RightLabel{($\wedge$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, Pa, \neg Pb, Pb \wedge \neg Pa \vdash$}
\RightLabel{($\wedge$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, Pa \wedge \neg Pb, Pb \wedge \neg Pa \vdash$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$Rab, Rba, Pa \wedge \neg Pb, \neg Rba \vee (Pb \wedge \neg Pa) \vdash$}
\RightLabel{($\vee$L)}
\BinaryInfC{$Rab, Rba, \neg Rab \vee (Pa \wedge \neg Pb), \neg Rba \vee (Pb \wedge \neg Pa) \vdash$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, \neg Rab \vee (Pa \wedge \neg Pb), \forall y(Rby \rightarrow (Pb \wedge \neg Py)) \vdash$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, \neg Rab \vee (Pa \wedge \neg Pb), \forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, \forall y(Ray \rightarrow (Pa \wedge \neg Py)), \forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$}
\RightLabel{($\forall$L)}
\UnaryInfC{$Rab, Rba, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$}
\RightLabel{($\wedge$L)}
\UnaryInfC{$Rab \wedge Rba, \forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash \neg(Rab \wedge Rba)$}
\RightLabel{($\forall$R)}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash \forall y \neg(Ray \wedge Rya)$}
\RightLabel{($\exists$R)}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash \exists x \forall y \neg(Rxy \wedge Ryx)$}
\end{prooftree}
$$

Die Sequenz ist genau dann allgemeingültig, wenn

$$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \wedge \neg \exists x \forall y \neg(Rxy \wedge Ryx)$$

nicht erfüllbar ist.
Eine Skolemnormalform zu diesem Satz ist

$$\forall z \forall x \forall y\, ((\neg Rxy \vee Px) \wedge (\neg Rxy \vee \neg Py) \wedge Rzfz \wedge Rfzz)$$

Der Satz liefert folgende Klauselmenge: $\{Rzfz\}, \{Rfzz\}, \{\neg Rxy, Px\}, \{\neg Rxy, \neg Py\}$

Geeignete Substitution von x und y durch z bzw. fz liefert

$$
\begin{tikzcd}
\{Rzfz\} \arrow[dr] & \{\neg Rzfz, \neg Pfz\} \arrow[d] & & \{Rfzz\} \arrow[d] & \{\neg Rfzz, Pfz\} \arrow[dl] \\
& \{\neg Pfz\} \arrow[dr] & & \{Pfz\} \arrow[dl] & \\
& & \square & &
\end{tikzcd}
$$