Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
23.06.2010

4. Übungsblatt zu FGdI 2

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $w = a_1 \dots a_n$ eine *Wortstruktur*

$$\mathcal{W}(w) = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$$

wobei $\qquad P_a := \{i \leq n \colon a_i = a\} \quad \text{und} \quad P_b := \{i \leq n \colon a_i = b\}\,.$

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(<, P_a, P_b)$ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \{\, w \in \Sigma^+ \mid \mathcal{W}(w) \models \varphi \,\}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?
   (i) $\forall x \forall y[x < y \to ((P_a x \to P_a y) \wedge (P_b y \to P_b x))]$
   (ii) $\forall x \forall y[(x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \to \exists z(x < z \wedge z < y \wedge P_b z)]$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.
   (i) $L((a + b)^* bb(a + b)^*)$
   (ii) $L((ab)^+)$

(c) **Zusatzaufgabe:** Wir definieren die Menge der $*$-*freien regulären Ausdrücke* induktiv durch
   - $\emptyset$ und jedes Element von Σ sind $*$-freie reguläre Ausdrücke;
   - sind α und β $*$-freie reguläre Ausdrücke, so auch $\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ und $\sim\!\alpha$.

   Die Semantik eines solchen Ausdrucks ist wie für reguläre Ausdrücke definiert, wobei die Operation $\sim$ für die Komplementierung steht: $L(\sim\!\alpha) := \Sigma^* \setminus L(\alpha)$. Konstruieren Sie (induktiv) zu einem gegebenen $*$-freien regulären Ausdruck α eine Formel $\varphi_\alpha(x, y)$, so daß

$$\mathcal{W}(w) \models \varphi_\alpha[i, k] \quad \text{gdw} \quad 1 \leq i \leq k \leq n \text{ und } w_{ik} \in L(\alpha)\,,$$

   wobei für $w = a_1 \dots a_n$, $w_{ik} = a_i a_{i+1} \dots a_k$.

   Bemerkung: Man kann zeigen, dass die $*$-freien regulären Ausdrücke genau die Sprachen beschreiben, die man mit Prädikatenlogik definieren kann. Weiterhin gibt es reguläre Ausdrücke, die Sprachen beschreiben, die von keinem $*$-freien regulären Ausdruck beschrieben werden. Reguläre Ausdrücke können also mehr Sprachen beschreiben als Logik erster Stufe. Allerdings gibt es eine Erweiterung der Logik erster Stufe, die sogenannte *monadische Logik zweiter Stufe*, mit der man genau die Sprachen definieren kann, die auch von regulären Ausdrücken beschrieben werden.

Aufgabe G2

Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln, wobei c ein Konstantensymbol, P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationsymbol ist:

(i) $\forall x(Pc \wedge \exists y(Px \leftrightarrow \neg Py))$

(ii) $\forall x(Px \vee \exists x \neg Px)$

(iii) $(\forall x \exists y(Rxy \rightarrow \forall x \exists y Ryx))$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(b) Geben Sie für die Formel aus (a) ein Herbrand-Modell an.

Aufgabe G3

Seien S_0 und $S_1 = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ Signaturen, so dass die Relationssymbole $R_1, R_2, \ldots, R_n$ Symbole nicht in S_0 vorkommen.

Ein gleichungsfreier *nicht-negativer universeller Horn-Satz* ist ein Satz der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n [(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta],$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ gleichungsfreie atomare Formeln sind. Wir betrachten im weiteren solche nicht-negativen universellen Horn-Sätze, in denen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ atomare Formeln über der Signatur $S_0 \cup S_1$ sind und β eine relationale atomare Formel über der Signatur S_1.

Sei $\mathcal{A}_0$ eine S_0-Struktur und Φ eine Menge von $\mathrm{FO}(S_0 \cup S_1)$-Formeln. Wir nennen eine Erweiterung von $\mathcal{A}_0$ zu einer $(S_0 \cup S_1)$-Struktur $\mathcal{A}$ um zusätzliche Relationen $R_1, \ldots, R_n$ *minimal für Φ,* wenn $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_n^{\mathcal{A}})$ ein Modell von Φ ist und für jede Erweiterung $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}_0, R_1^{\mathcal{A}'}, \ldots, R_n^{\mathcal{A}'})$ von $\mathcal{A}_0$, welche ebenfalls ein Modell von Φ ist, gilt

$$R_1^{\mathcal{A}} \subseteq R_1^{\mathcal{A}'}, \quad \ldots \quad R_n^{\mathcal{A}} \subseteq R_n^{\mathcal{A}'}.$$

Man kann zeigen, dass in jeder Struktur für alle Mengen von nicht-negativen universellen Horn-Sätzen zusätzliche Relationen existieren, die minimal sind (siehe dazu Aufgabe H1).

(a) Sei $\mathcal{V}_0 = (V, E^{\mathcal{V}_0}, P^{\mathcal{V}_0})$ eine Struktur mit Trägermenge V, eine zweistellige Relation $E^{\mathcal{V}_0}$ und eine einstellige Relation $P^{\mathcal{V}_0}$. Beschreiben Sie umgangssprachlich die Teilmenge $R_1^{\mathcal{V}} \subseteq V$, so dass die Erweiterung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}_0$ um $R_1^{\mathcal{V}}$ minimal ist für die folgende Menge Φ von nicht-negativen universellen Horn-Sätzen:

$$\Phi := \{\forall x\,(Px \rightarrow R_1 x), \forall x \forall y\,(R_1 y \wedge Exy \rightarrow R_1 x)\}$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu $\mathcal{V}_0$ als einen Graphen mit $E^{\mathcal{V}_0}$ als Kantenrelation und $P^{\mathcal{V}_0}$ als einer Knotenfarbe.

(b) Wir versuchen $R_1^{\mathcal{V}}$ von unten zu approximieren. Sei dazu für $X \subseteq V$

$$X' = \{v \in V : v \in P^{\mathcal{V}_0} \text{ oder } (v, w) \in E^{\mathcal{V}_0} \text{ für ein } w \in X\},$$

$Q_0 = \emptyset$ und $Q_{i+1} = (Q_i)'$. Beweisen Sie, dass $Q_i \subseteq Q_{i+1}$ und $R_1^{\mathcal{V}} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$. Was ist die intuitive Bedeutung von Q_i?

Hinweis: Um $R_1^{\mathcal{V}} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ zu zeigen, können Sie die Minimalität von $R_1^{\mathcal{V}}$ ausnutzen.

(c) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel $\psi_i(x)$ an, die in jeder Struktur $\mathcal{V}_0 = (V, E^{\mathcal{V}_0}, P^{\mathcal{V}_0})$ die Teilmenge Q_i definiert, also so, dass:

$$Q_i = \{v \in V : \mathcal{V}_0 \models \psi_i(v)\}.$$

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine prädikatenlogische Formel $\varphi(x)$ gibt, die in jeder Struktur $\mathcal{V}_0 = (V, E^{\mathcal{V}_0}, P^{\mathcal{V}_0})$ die Menge $R_1^{\mathcal{V}}$ definiert, so dass die Erweiterung von $\mathcal{V}_0$ um $R_1^{\mathcal{V}}$ minimal für Φ ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe G3. Wir betrachten weiterhin nicht-negative universelle Horn-Formeln über der Signatur $S_0 \cup S_1$, so dass in der Konklusion jeweils nur eine Relation aus S_1 auftritt. Weiterhin nehmen wir an, dass S_0 keine Relationssymbole enthalte.

(a) Nehmen Sie an, eine S_0-Struktur $\mathcal{A}_0$ besitze eine minimale Erweiterung bezüglich einer Formelmenge Φ. Zeigen Sie, dass diese dann von der Form $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, (R_i^{\mathcal{A}})_{i \in S_1})$ ist, wobei $R_i^{\mathcal{A}} = \bigcap \{R_i^{\mathcal{A}'} \mid \text{ es gibt } (R_j^{\mathcal{A}'})_{R_j \in S_1 \setminus \{R_i\}} \text{ so dass } (\mathcal{A}_0, (R_j^{\mathcal{A}'})_{R_j \in S_1}) \models \Phi\}$.

(b) Beweisen Sie, dass jede solche Menge Φ von nicht-negativen universellen Horn-Sätzen ein Herbrand-Modell $\mathcal{H} = (T_0(S_0), (R_i^{\mathcal{H}})_{R_i \in S_1})$ besitzt, das minimal für Φ ist, wenn wir $\mathcal{H}$ als Erweiterung von $T_0(S)$ auffassen.

(c) Finden Sie das minimale Herbrand-Modell der Sätze

$$R_1 c\,, \qquad \forall x(R_1 x \to R_1 fxx)\,.$$

und begründen Sie, warum dieses Modell minimal ist. Dafür dürfen Sie den Hinweis benutzen ohne ihn zu beweisen.

Hinweis: Man kann allgemein beweisen, dass die Approximation von unten wie in Aufgabe G3 für alle Modelle und alle Mengen nicht-negativer universeller Hornformeln, wie wir sie hier betrachten, funktioniert.

(d) Ein gleichungsfreier *negativer universeller Horn-Satz* hat die Gestalt

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)$$

mit gleichungsfreien Atomen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Sei Φ_+ eine Menge nicht-negativer universeller Horn-Sätze und Φ_- eine Menge negativer universeller Horn-Sätze. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\Phi_+ \cup \Phi_-$ genau dann erfüllbar ist, wenn jede Formel aus Φ_- im minimalen Herbrand-Modell von Φ_+ gilt.

Hinweis: Es kann hilfreich sein zu zeigen, dass ein negativer universeller Horn-Satz φ folgendes erfüllt: Wenn $R_1^{\mathcal{A}}, \dots, R_n^{\mathcal{A}}$ und $R_1^{\mathcal{A}'}, \dots, R_n^{\mathcal{A}'}$ Relationen sind, so dass $R_i^{\mathcal{A}} \subseteq R_i^{\mathcal{A}'}$ und zusätzlich $(\mathcal{A}_0, R_1^{\mathcal{A}'}, \dots, R_n^{\mathcal{A}'}) \models \varphi$, dann gilt $(\mathcal{A}_0, R_1^{\mathcal{A}}, \dots, R_n^{\mathcal{A}}) \models \varphi$

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y((R(x,y) \wedge Q(y)) \to \neg P(x)) \\
\varphi_2 &:= \forall x(\neg P(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge P(y) \wedge Q(y))) \\
\varphi_3 &:= \forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge \neg P(y))) \\
\varphi_4 &:= \forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für alle vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.