Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
23.06.2010

4. Übungsblatt zu FGdI 2

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir wollen Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ mit Hilfe der Prädikatenlogik definieren. Wie im Skript, S. 3, definieren wir zu einem nichtleeren Wort $w = a_1 \dots a_n$ eine *Wortstruktur*

$$\mathcal{W}(w) = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$$

wobei $\qquad P_a := \{ i \leq n \mid a_i = a \} \quad \text{und} \quad P_b := \{ i \leq n \mid a_i = b \}$.

(Wir schließen das leere Wort aus, da es keine leeren Strukturen gibt.) Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(<, P_a, P_b)$ definiert dann die Sprache $L(\varphi) := \{ w \in \Sigma^+ \mid \mathcal{W}(w) \models \varphi \}$.

(a) Welche Sprachen definieren die folgenden Formeln?
  (i) $\forall x \forall y [x < y \rightarrow ((P_a x \rightarrow P_a y) \wedge (P_b y \rightarrow P_b x))]$
  (ii) $\forall x \forall y [(x < y \wedge P_a x \wedge P_a y) \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y \wedge P_b z)]$

(b) Geben Sie zu den folgenden Sprachen Formeln an, welche sie definieren.
  (i) $L((a + b)^* bb (a + b)^*)$
  (ii) $L((ab)^+)$

(c) **Zusatzaufgabe:** Wir definieren die Menge der $*$-*freien regulären Ausdrücke* induktiv durch
  - $\emptyset$ und jedes Element von Σ sind $*$-freie reguläre Ausdrücke;
  - sind α und β $*$-freie reguläre Ausdrücke, so auch $\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ und $\sim\alpha$.

  Die Semantik eines solchen Ausdrucks ist wie für reguläre Ausdrücke definiert, wobei die Operation $\sim$ für die Komplementierung steht: $L(\sim\alpha) := \Sigma^* \setminus L(\alpha)$. Konstruieren Sie (induktiv) zu einem gegebenen $*$-freien regulären Ausdruck α eine Formel $\varphi_\alpha(x, y)$, so daß

  $$\mathcal{W}(a_1 \dots a_n) \models \varphi_\alpha[i, k] \quad \text{gdw} \quad 1 \leq i \leq k \leq n \text{ und } w_{ij} \in L(\alpha).$$

  Bemerkung: Man kann zeigen, dass die $*$-freien regulären Ausdrücke genau die Sprachen beschreiben, die man mit Prädikatenlogik definieren kann. Weiterhin gibt es reguläre Ausdrücke, die Sprachen beschreiben, die von keinem $*$-freien regulären Ausdruck beschrieben werden. Reguläre Ausdrücke können also mehr Sprachen beschreiben als Logik erster Stufe. Allerdings gibt es eine Erweiterung der Logik erster Stufe, die sogenannte *monadische Logik zweiter Stufe*, mit der man genau die Sprachen definieren kann, die auch von regulären Ausdrücken beschrieben werden.

Musterlösung:

(a) Der erste Teil der ersten Formel besagt, dass rechts von einem a nur a stehen dürfen. Analog sagt der zweite Teil, dass links von einem b nur b stehen dürfen, also wird die Sprache $L(b^*(a+b)a^*)$ definiert. Die zweite Formel besagt, dass zwischen zwei a jeweils ein b auftauchen muss, also ist die definierte Sprache $L((b + ab)^*(a + b)b^*)$.

(b)
$$\exists x \exists y [x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y) \wedge P_b x \wedge P_b y]$$
und
$$\forall x \forall y [(x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y)) \rightarrow (P_a x \leftrightarrow P_b y)] \wedge$$
$$\forall x (\neg \exists y (y < x) \rightarrow P_a x) \wedge \forall x (\neg \exists y (x < y) \rightarrow P_b x)$$

(c) Für $\alpha = \emptyset$, $\varphi_\alpha(x, y) := \exists z (\neg z = z)$. Für $\alpha = l \in \Sigma$, $\varphi_l(x, y) := x = y \wedge P_l x$. Für andere $*$-freien regulären Ausdrücke α wird $\varphi_\alpha(x, y)$ induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}(x, y) &:= \exists z [x \leq z \wedge z \leq y \wedge \varphi_\alpha(x, z) \wedge \varphi_\beta(z, y)] \\ \varphi_{\alpha+\beta}(x, y) &:= \varphi_\alpha(x, y) \vee \varphi_\beta(x, y) \\ \varphi_{\sim\alpha}(x, y) &:= x \leq y \wedge \neg \varphi_\alpha(x, y) \end{aligned}$$

($x \leq y$ ist eine Abkürzung für $x < y \vee x = y$.)

Aufgabe G2

Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln, wobei c ein Konstantensymbol, P ein einstelliges Relationssymbol und R ein zweistelliges Relationsymbol ist:

(a) $\forall x (Pc \wedge \exists y (Px \leftrightarrow \neg Py))$

(b) $\forall x (Px \vee \exists x \neg Px)$

(c) $(\forall x \exists y (Rxy \rightarrow \forall x \exists y Ryx))$

(i) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(ii) Geben Sie für die Formel aus (a) ein Herbrand-Modell an.

Musterlösung:

(i) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

(a) Pränexe Normalform:

$$\forall x (Pc \wedge \exists y (Px \leftrightarrow \neg Py)) \equiv \forall x \exists y (Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg Py))$$

Skolemnormalform: $\forall x (Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg P f_y x)$ für ein neues einstelliges Funktionssymbol f_y.

(b) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \forall x (Px \vee \exists x \neg Px) &\equiv \forall x (Px \vee \exists y \neg Py) \\ &\equiv \forall x \exists y (Px \vee \neg Py) \end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall x (Px \vee \neg P f_y(x))$ für ein neues einstelliges Funktionssymbol f_y.

(c) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y (Rxy \rightarrow \forall x \exists y Ryx) &\equiv \forall x \exists y (Rxy \rightarrow \forall z \exists t Rtz) \\ &\equiv \forall x \exists y (\neg Rxy \vee \forall z \exists t Rtz) \\ &\equiv \forall x \exists y \forall z \exists t (\neg Rxy \vee Rtz) \\ &\equiv \forall x \exists y \forall z \exists t (Rxy \rightarrow Rtz) \end{aligned}$$

Achtung: Wenn man einen Quantor aus der Prämisse einer Implikation herauszieht, muss man ihn dualisieren! Wenn man ihn aus der Konklusion herauszieht bleibt der Quantor dagegen erhalten.

Skolemnormalform: $\forall x \forall z (Rx f_y(x) \rightarrow R f_t(x, z) z$ für ein neues Konstantensymbol c und ein einstelliges Funktionssymbol f_t.

(ii) Eine Herbrand-Struktur zur Signatur $S = (c, f_y, P)$ ist $\mathcal{H} = (\mathcal{T}_0(S), c^{\mathcal{H}}, f_y^{\mathcal{H}}, P^{\mathcal{H}})$, wobei $\mathcal{T}_0(S)$ die variablenfreien Terme über S sind, also die Elemente von der Form c, fc, ffc, etc., $c^{\mathcal{H}} = c$ und $f_y^{\mathcal{H}}(f^n c) = ff^n c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $P^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{T}_0(S)$ muss so gewählt sein, dass $\forall x(Pc \wedge (Px \leftrightarrow \neg P f_y x)$ erfüllt wird. Die Formel besagt, dass $c \in P^{\mathcal{H}}$ gelten soll und dass jede Anwendung von f Elemente bezüglich $P^{\mathcal{H}}$ wie eine Negation wirkt, das heißt jeder zweite Term muss in $P^{\mathcal{H}}$ liegen. Wir setzen also $P^{\mathcal{H}} := \{f^n c \colon n \text{ ist gerade}\}$.

Aufgabe G3

Seien S_0 und $S_1 = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ Signaturen, so dass die Relationssymbole $R_1, R_2, \dots, R_n$ Symbole nicht in S_0 vorkommen.

Ein gleichungsfreier *nicht-negativer universeller Horn-Satz* ist ein Satz der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n [(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \rightarrow \beta],$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ gleichungsfreie atomare Formeln sind. Wir betrachten im weiteren solche nicht-negativen universellen Horn-Sätze, in denen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ atomare Formeln über der Signatur $S_0 \cup S_1$ sind und β eine relationale atomare Formel über der Signatur S_1.

Sei $\mathfrak{A}$ eine S_0-Struktur und Φ eine Menge von $\mathrm{FO}(S_0 \cup S_1))$-Formeln. Wir nennen eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ zu einer $(S_0 \cup S_1)$-Struktur um zusätzliche Relationen $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ *minimal für Φ,* wenn $(\mathfrak{A}, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ ein Modell von Φ ist und für jede Erweiterung $(\mathfrak{A}, \mathcal{R}'_1, \dots, \mathcal{R}'_n)$ von $\mathfrak{A}$, welche ebenfalls ein Modell von Φ ist, gilt

$$\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}'_1, \quad \dots \quad \mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}'_n.$$

Man kann zeigen, dass in jeder Struktur für alle Mengen von nicht-negativen universellen Horn-Sätzen zusätzliche Relationen existieren, die minimal sind (siehe dazu Aufgabe H1).

(a) Sei $\mathfrak{V} = (V, E, P)$ eine Struktur mit Trägermenge V, eine zweistellige Relation E und eine einstellige Relation P. Beschreiben Sie umgangssprachlich die Teilmenge $\mathcal{Q} \subseteq V$, so dass $\mathcal{Q}$ minimal ist für die folgende Menge Φ von nicht-negativen universellen Horn-Sätzen:

$$\Phi := \{\forall x\, (Px \rightarrow Qx), \forall x \forall y\, (Qy \wedge Exy \rightarrow Qx)\}$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu V als einen Graphen mit E als Kantenrelation und P als einer Kontenfarbe.

(b) Wir versuchen $\mathcal{Q}$ von unten zu approximieren. Sei dazu für $X \subseteq V$

$$X' = \{x \in V \,:\, x \in P \vee \exists y \big((x, y) \in E \wedge y \in X\big)\},$$

$Q_0 = \emptyset$ und $Q_{i+1} = (Q_i)'$. Beweisen Sie, dass $Q_i \subseteq Q_{i+1}$ und $\mathcal{Q} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$. Was ist die intuitive Bedeutung von Q_i?

Hinweis: Um $\mathcal{Q} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ zu zeigen, können Sie die Minimalität von $\mathcal{Q}$ ausnutzen.

(c) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel $\psi_i(x)$ an, die in jede Struktur $\mathfrak{V} = (V, E, P)$ die Teilmenge Q_i definiert, also so, dass:

$$Q_i = \{v \in V \,:\, \mathfrak{V} \models \psi_i(v)\}.$$

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es eine keine prädikatenlogische Formel $\varphi(x)$ gibt, die in jeder Struktur $\mathfrak{V} = (V, E, P)$ die Menge $\mathcal{Q}$ definiert, so dass die Erweiterung von $\mathfrak{V}$ um $\mathcal{Q}$ minimal für Φ ist.

Musterlösung:

(a) $\mathcal{Q}$ besteht aus den Knoten in V, von denen man mit einem E-Pfad zu einem Knoten in P gelangen kann (also, die $v \in V$, so dass es eine Folge $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ gibt, mit $v_0 = v$, $v_n \in P$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i < n$).

(b) Die Aussage $Q_i \subseteq Q_{i+1}$ beweisen wir mit Induktion. Für $i = 0$, gilt $Q_0 = \emptyset$ und damit $Q_0 \subseteq Q_1$.
Gilt $Q_i \subseteq Q_{i+1}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} Q_{i+1} &= (Q_i)' \\ &= \{x \in V \,:\, x \in P \vee \exists y \left((x,y) \in E \wedge y \in Q_i\right)\} \\ &\subseteq \{x \in V \,:\, x \in P \vee \exists y \left((x,y) \in E \wedge y \in Q_{i+1}\right)\} \\ &= Q_{i+2}. \end{aligned}$$

Also gilt $Q_i \subseteq Q_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{Q} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$, reicht es zu zeigen, dass $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ ein Modell von Φ ist. Da $Q_1 = P$ gilt die Aussage $\forall x\,(Px \to Qx)$ sicher. Betrachten wir also x, y, so dass $(x,y) \in E$ und $y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $y \in Q_i$. Dann folgt, dass $x \in Q_{i+1} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$. Also gilt die zweite Aussage in Φ auch.
Um die andere Inklusion $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i \subseteq \mathcal{Q}$ zu zeigen, beweist man mit Induktion über i, dass $Q_i \subseteq \mathcal{Q}$. Als Induktionsanfang betrachten wir die Fälle $i = 0$ und $i = 1$. $Q_0 = \emptyset \subseteq \mathcal{Q}$ ist offensichtlich wahr, genauso sieht man, dass $Q_1 = P \subseteq \mathcal{Q}$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P \subseteq Q_i \subseteq \mathcal{Q}$ ist. Für jedes $v \in Q_{i+1}$ gilt, $v \in P \subseteq \mathcal{Q}$ oder es gibt ein v' mit $(v,v') \in E$ und $v' \in Q_i \subseteq \mathcal{Q}$. Damit erfüllen aber v und v' in $(\mathfrak{V}, \mathcal{Q})$ die Prämisse von $\forall x \forall y (Qy \wedge Exy \to Qx)$, also muss v auch die Konklusion erfüllen, womit $v \in \mathcal{Q}$ bewiesen ist.
Intuitiv ist Q_i die Menge von Knoten von denen man mit einem E-Pfad der Länge kleiner als i einen Knoten in P erreichen kann.

(c) Wir definieren induktiv:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \neg x = x \\ \psi_{i+1}(x) &= Px \vee \exists y \left(Exy \wedge \psi_i(y)\right) \end{aligned}$$

(d) Nehmen wir an, es gäbe eine Formel φ die in jeder Struktur $\mathfrak{V}$ eine Teilmenge $\mathcal{Q}$ definiert, so dass $(\mathfrak{V}, \mathcal{Q})$ minimal für Φ ist. Erweitern wir die Sprache um eine Konstante c und betrachten wir die Satzmenge:

$$\Psi = \{\varphi(c)\} \cup \{\neg\psi_i(c) \,:\, i \in \mathbb{N}\}.$$

Die Formelmenge Ψ is unerfüllbar, da man in einem Modell $\mathfrak{V}$ die Konstante c nicht widerspruchsfrei interpreteren kann: einerseits soll man mittels eines E-Pfads von c aus Knoten in P erreichen können, da $\varphi(c)$ gilt; andererseits darf dieser Pfad nicht die Länge i haben für alle $i \in \mathbb{N}$. Aber so ein Pfad muss natürlich eine bestimmte Länge i haben, also sind die Aussagen widersprüchlich.
Dann ist nach dem Kompaktheitssatz eine endliche Teilmenge von Ψ unerfüllbar und insbesondere ist schon eine Teilmenge von der Form

$$\Psi_n = \{\varphi(c)\} \cup \{\neg\psi_i(c) \,:\, i \leq n\}$$

unerfüllbar (da jede endliche Teilmenge von Ψ in einem der Ψ_n enthalten ist). Im Widerspruch dazu zeigen wir nun, dass Ψ_n sehr wohl ein Modell besitzt. Wir betrachten das folgende Modell

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\ ,$$

wobei wir c als 0 interpretieren und P als $\{n\}$.
Also haben wir einen Widerspruch und schliessen, dass es keine Formel φ geben kann, die in jede Struktur $\mathfrak{V}$ die Teilmenge $\mathcal{Q}$ definiert.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Aufgabe G3. Wir betrachten weiterhin nicht-negative universelle Horn-Formeln über der Signatur $S_0 \cup S_1$, so dass in der Konklusion jeweils nur eine Relation aus S_1 auftritt. Weiterhin nehmen wir an, dass S_0 keine Relationssymbole enthalte.

(a) Nehmen Sie an, eine S_0-Struktur $\mathfrak{A}$ besitze eine minimale Erweiterung bezüglich einer Formelmenge Φ. Zeigen Sie, dass diese dann von der Form $(\mathfrak{A}, (\mathcal{R}_i)_{i \in S_1})$ sind, wobei $\mathcal{R}_i = \bigcap \{\mathcal{R}'_i \mid \text{es gibt } (\mathcal{R}'_j)_{R_j \in S_1 \setminus \{R_i\}} \text{ so dass } (\mathfrak{A}, (\mathcal{R}'_j)_{R_j \in S_1}) \models \Phi\}$.

(b) Beweisen Sie, dass jede solche Menge Φ von nicht-negativen universellen Horn-Sätzen ein Herbrand-Modell $\mathcal{H} = (\mathcal{T}_0(S_0), (\mathcal{R}_i)_{R_i \in S_1})$ besitzt, das minimal für Φ ist, wenn wir $\mathcal{H}$ als Erweiterung von $\mathcal{T}_0(S)$ auffassen.

(c) Finden Sie das minimale Herbrand-Modell der Sätze

$$Pc\,, \qquad \forall x(Px \to Pfxx)\,.$$

und begründen Sie, warum dieses Modell minimal ist. Dafür dürfen Sie den Hinweis benutzen ohne ihn zu beweisen.

Hinweis: Man kann allgemein beweisen, dass die Approximation von unten wie in Aufgabe G3 für alle Modelle und alle Mengen nicht-negativer universeller Hornformeln, wie wir sie hier betrachten, funktioniert.

(d) Ein gleichungsfreier *negativer universeller Horn-Satz* hat die Gestalt

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)$$

mit gleichungsfreien Atomen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Sei Φ_+ eine Menge nicht-negativer universeller Horn-Sätze und Φ_- eine Menge negativer universeller Horn-Sätze. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\Phi_+ \cup \Phi_-$ genau dann erfüllbar ist, wenn jede Formel aus Φ_- im minimalen Herbrand-Modell von Φ_+ gilt.

Hinweis: Es kann hilfreich ein zu zeigen, dass ein negativer universeller Horn-Satz φ folgendes erfüllt: Wenn $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ und $\mathcal{R}'_1, \ldots, \mathcal{R}'_n$ Relationen sind, so dass $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}'_i$ und zusätzlich $(\mathfrak{A}, \mathcal{R}'_1, \ldots, \mathcal{R}'_n) \models \varphi$, dann gilt $(\mathfrak{A}, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n) \models \varphi$

Musterlösung:

(a) Seien $(\mathcal{R}_i)_{R_i \in S_1}$ Relationen, so dass die Erweiterung $(\mathfrak{A}, (\mathcal{R}_i)_{R_i \in S_1})$ minimal bezüglich Φ ist. Wir setzen $M_i := \{\mathcal{R}'_i \mid \text{es gibt } (\mathcal{R}'_j)_{j \in S_1 \setminus R_i} \text{ so dass } (\mathfrak{A}, (\mathcal{R}'_j)_{j \in S_1}) \models \Phi\}$. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{R}_i = \bigcap_{\mathcal{R}'_i \in M i} \mathcal{R}'_i$. Da $\mathcal{R}_i \in M_i$, ist $(\supseteq)$ klar. Für $(\subseteq)$ reicht es festzustellen, dass nach Definition für alle $\mathcal{R}'_i \in M_i$ gilt, dass aufgrund der Minimalität von $\mathcal{R}_i$ dann $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}'_i$ gilt.

(b) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Herbrand-Modelle von Φ. Für jedes Relationssymbol $R_i \in S_1$ definieren wir die Relation

$$\mathcal{R}_i := \bigcap \{\, R_i^{\mathcal{H}} \mid \mathcal{H} \in \mathcal{M} \,\}\,,$$

wobei $\mathcal{R}_i^{\mathcal{H}}$ die Interpretation von R_i in $\mathcal{H}$ bezeichnet. Wir behaupten, dass $\mathcal{H}_0 := (\mathcal{T}_0(S), (\mathcal{R}_i)_{R_i \in S_1})$ das minimale Herbrand-Modell von Φ ist.

Für ein beliebiges Herbrand-Modell $\mathcal{H} \in \mathcal{M}$ gilt $R_0 \subseteq R^{\mathcal{H}}$ nach Definition von R_0. Es reicht also zu zeigen, daß $\mathcal{H}_0$ tatächlich ein Modell von Φ ist.

Sei $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_n[(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \to \beta]$ eine Formel aus Φ. Um zu zeigen, dass $\mathcal{H}_0 \models \varphi$ betrachten wir ein beliebiges Tupel $\bar{a} \in T_0(S)^n$. Wenn ein Index i existiert mit $\mathcal{H}_0 \not\models \alpha_i[\bar{a}]$, dann ist die Implikation erfüllt. Nehmen wir also an, daß $\mathcal{H}_0 \models \alpha_i[\bar{a}]$, für alle i. Nach Definition von $\mathcal{H}_0$ folgt daraus, daß $\mathcal{H} \models \alpha_i[\bar{a}]$, für alle $\mathcal{H} \in \mathcal{M}$. Da die Elemente von $\mathcal{M}$ Modelle von φ sind, gilt also $\mathcal{H} \models \beta[\bar{a}]$ für alle $\mathcal{H} \in \mathcal{M}$. Somit gilt auch $\mathcal{H}_0 \models \beta[\bar{a}]$. Dies impliziert, dass $\mathcal{H}_0 \models \varphi$.

(c) $\mathcal{H}_0 := (\mathcal{T}_0(S), P)$, wobei P die Menge aller »balancierten« Terme ist:

$$P = \{c, fcc, ffccfcc, fffccfccffccfcc, \dots\}$$

(d) ($\Leftarrow$) Wenn das minimale Herbrand-Modell von Φ_+ auch Modell von Φ_- ist, dann ist offensichtlich $\Phi_+ \cup \Phi_-$ erfüllbar.

($\Rightarrow$) Angenommen, die Menge $\Phi_+ \cup \Phi_-$ ist erfüllbar. Dann hat diese Menge eine Herbrand-Modell $\mathcal{H} = (\mathcal{T}_0(S_0), (\mathcal{R}_i^{\mathcal{H}})_{R_i \in S_1})$. Sei $\mathcal{H}_0 = (\mathcal{T}_0(S_0), (\mathcal{R}_i^{\mathcal{H}_0})_{R_i \in S_1})$ das minimale Herbrand-Modell von Φ_+. Dann gilt $\mathcal{R}_i^{\mathcal{H}_0} \subseteq \mathcal{R}_i^{\mathcal{H}}$ für jedes i. Für jede Formel $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \in \Phi_-$ folgt deshalb aus $\mathcal{H} \models \varphi$, dass $\mathcal{H}_0 \models \varphi$. Also ist $\mathcal{H}_0$ Modell von Φ_-.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y (R(x,y) \wedge Q(y) \to \neg P(x)) \\
\varphi_2 &:= \forall x (\neg P(x) \to \exists y (R(x,y) \wedge P(y) \wedge Q(y))) \\
\varphi_3 &:= \forall x (P(x) \to \exists y (R(x,y) \wedge \neg P(y))) \\
\varphi_4 &:= \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))
\end{aligned}$$

(a) Wandeln Sie die Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ in Skolem-Normalform um.

(b) Zeigen Sie *semantisch*, dass die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nicht erfüllbar ist.

(c) Je drei der vier Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sind gemeinsam erfüllbar. Weisen Sie dies für alle vier Kombinationen durch Angabe von Herbrand-Modellen nach.

Musterlösung:

(a) φ_1 und φ_4 sind schon in Skolem-Normalform, für φ_2 und φ_3 führen wir einstellige Funktionssymbole f und g ein.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\rightsquigarrow \forall x \forall y (R(x,y) \wedge Q(y) \to \neg P(x)) \\
\varphi_2 &\rightsquigarrow \forall x (\neg P(x) \to R(x, g(x)) \wedge P(g(x)) \wedge Q(g(x))) \\
\varphi_3 &\rightsquigarrow \forall x (P(x) \to R(x, f(x)) \wedge \neg P(f(x))) \\
\varphi_4 &\rightsquigarrow \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))
\end{aligned}$$

(b) Es genügt zu zeigen, dass die Skolem-Normalformen von φ_1 bis φ_4 nicht gleichzeitig erfüllbar sind.

Nehmen wir an, dass $\mathcal{A}$ ein Modell wäre. Es ist hilfreich $\mathcal{A}$ als einen Graph zu betrachten, wobei $R^{\mathcal{A}}$ die Kantenrelation ist und $P^{\mathcal{A}}$ eine Eigenschaft der Knoten. Sei x einen beliebigen Knoten. Es gibt zwei Möglichkeiten:

(1) x hat die Eigenschaft P. Dann ist x nach φ_3 mit einem Knoten $f(x)$ verbunden, der nicht die Eigenschaft P hat. φ_2 besagt dann, dass $f(x)$ mit einem Knoten $g(f(x))$ verbunden ist, der die Eigenschaft Q hat. Andererseits ist die Relation R transitiv (φ_4) und deshalb ist x mit $g(f(x))$ verbunden. Da $g(f(x))$ die Eigenschaft Q hat, hat x nach φ_1 die Eigenschaft P nicht. Widerspruch!

(2) x hat die Eigenschaft P nicht. Dann ist wegen φ_2 x mit einem Knoten $g(x)$ verbunden, der die Eigenschaft P hat. Wir erreichen dann wie oben einen Widerspruch mit $g(x)$ statt x.

Wir schliessen, dass es keine Modelle von $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ gibt.

(c) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an.

- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$
  Trägermenge: $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{n+1} = \{f(t) : t \in T_n\} \cup \{g(t) : t \in T_n\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \{(s,t) \in T^2 : s \in T_n \text{ und } t \in T_{n+1} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ (also ein binärer Baum).
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = \bigcup\{T_n : n \text{ ungerade}\}$.

- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{f^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (niemals verbunden).
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (kein Knoten hat die Eigenschaft P oder Q).
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \{g^n(c) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = \emptyset$ (niemals verbunden).
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = T$ (alle Knoten haben die Eigenschaft P und Q).
- Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$
  Trägermenge: $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{n+1} = \{f(t) \,:\, t \in T_n\} \cup \{g(t) \,:\, t \in T_n\}$.
  $R^{\mathcal{H}} = T \times T$ (immer verbunden).
  $P^{\mathcal{H}} = Q^{\mathcal{H}} = \bigcup\{T_n \,:\, n \text{ ungerade}\}$.