Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
16.06.2010

# 3. Übungsblatt zu FGdI 2

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**

(a) Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert in $\mathcal{R}$ die Relation

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{R}} := \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{R} \models \varphi[a, b] \}.$$

Geben Sie Formeln an, die die folgenden Relationen in $\mathbb{R}^2$ definieren:

(i) Einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

(ii) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 2/3.

(iii) Die Strecke, welche vom Punkt $(1, 2)$ bis zum Kreis aus (i) führt und senkrecht auf diesem steht.

(b) Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass

$$\exists x\, \varphi \land \exists x\, \psi \quad \not\equiv \quad \exists x\, (\varphi \land \psi).$$

Überlegen Sie sich anhand des Semantikspiels warum Ihr Gegenbeispiel zeigt, dass die Formeln nicht äquivalent sind.

**Musterlösung:**

(a) (i) $\varphi(x, y) := x \cdot x + y \cdot y = t_4$, wobei wir $t_n$ als eine Abkürzung für $\underbrace{1 + 1 + \ldots 1}_{n-\text{mal}}$ betrachten.

(ii) $\varphi(x, y) := x + x = y + y + y$ oder $\varphi(x, y) := t_2 \cdot x = t_3 \cdot y$.

(iii) $\varphi(x, y) := (y + y = x) \land (x < 1 \lor x = 1) \land (0 < y)$
$\land (t_4 < x \cdot x + y \cdot y \lor t_4 = x \cdot x + y \cdot y)$

(b) Man nimmt z.B. die Struktur $(\mathbb{B} = \{0, 1\}, 0, 1)$ zur Signatur $S = \{0, 1\}$ mit zwei Konstantensymbolen 0 und 1, und Formeln $\varphi(x) := x = 0$ und $\psi(x) := x = 1$.

**V** gewinnt das Spiel zur Formel $\exists x\, \varphi \land \exists x\, \psi$, da sie die folgende Gewinnstrategie hat: sie wartet ab welches Konjunktsglied von **F** gewählt wird. Falls **F** das Konjunktionsglied $\exists x\, \varphi$ wählt, wählt sie $x = 0$; falls **F** das Konjunktionsglied $\exists x\, \psi$ wählt, wählt sie $x = 1$. In beiden Fällen gewinnt sie, also ist die Formel $\exists x\, \varphi \land \exists x\, \psi$ wahr in diesem Modell.

Andererseits gewinnt **F** das Spiel zur Formel $\exists x\, (\varphi \land \psi)$, da er die folgende Gewinnstrategie hat: er wartet ab welches Element $x \in \mathbb{B}$ von **V** gewählt wird. Falls **V** den Wert $x = 0$ wählt, wählt er die Teilformel $\psi$; falls **V** den Wert $x = 1$ wählt, wählt er das Konjunktionsglied $\varphi$. In beiden Fällen gewinnt er, also ist die Formel $\exists x\, (\varphi \land \psi)$ unwahr in diesem Modell.

**Aufgabe G2**

Eine *nicht negative Hornformel* ist eine Formel der Form

$$(q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \to q\,.$$

(Für $n = 0$ ergibt sich einfach $q$.)
Man beachte, dass eine nicht negative Hornformel $(q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \to q$ einer Klausel $\{\neg q_1, \ldots, \neg q_n, q\}$ entspricht, die genau ein positives Literal enthält. Allgemeiner heißen Klauseln mit *höchstens einem* positiven Literal Hornklauseln.

(a) Geben Sie alle Modelle der Menge

$$\Phi = \{p, (p \wedge q) \to r, p \to r, (p \wedge q) \to s, (p \wedge r) \to t, s \to t\}$$

an.
Welches ist das minimale Modell (vgl. Skript Lemma 5.12 und H1)?

(b) $K := \big\{\{p\},\ \{\neg p \neg q, r\},\ \{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q, s\},\ \{\neg p, \neg r, t\}, \{\neg s, t\}\big\}$ ist die Klauselmenge, die zu der Menge der Hornformeln $\Phi$ aus (a) gehört.
Berechnen Sie $\mathrm{Res}^*(K)$.

**Musterlösung:**

(a) Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Das erste Modell ist minimal.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(K) &= \big\{\{\neg p, \neg q, r\},\ \{\neg p, r\},\ \{p\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p, \neg r, t\}, \{\neg s, t\}\big\}\\
\mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \big\{\{\neg p, t\},\ \{\neg q, r\},\ \{r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, t\}, \{\neg p, \neg q, t\}\big\}\\
\mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \big\{\{t\}, \{\neg q, t\}\big\}\\
\mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K)
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^*(K) = \big\{&\{\neg p, \neg q, r\},\ \{\neg p, r\},\ \{p\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p, \neg r, t\}, \{\neg s, t\},\\
&\{\neg p, t\},\ \{\neg q, r\},\ \{r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, t\}, \{\neg p, \neg q, t\}, \{t\}, \{\neg q, t\}\big\}\,.
\end{aligned}$$

**Aufgabe G3**

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

**Musterlösung:**

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,p \vdash p,r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{q,p \vdash q,r}\,(\mathrm{Ax})}{q,p \vdash p \wedge q, r}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{}{r,p \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{q \vee r, p \vdash p \wedge q, r}\,(\vee\mathrm{L})}{q \vee r \vdash p \wedge q, r, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r, \neg p}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r), r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash p \wedge q, \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})}{\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p}\,(\vee\mathrm{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q \vdash p, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p,q \vdash q, p \wedge r}\,(\mathrm{Ax})}{p,q \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{\dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, p}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p,r \vdash p \wedge q, r}\,(\mathrm{Ax})}{p,r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\wedge\mathrm{R})}{p, q \vee r \vdash p \wedge q, p \wedge r}\,(\vee\mathrm{L})}{p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \vdash q,q \quad r \vdash q,p}{r \vdash q, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R}) \quad \dfrac{}{r \vdash r, p \wedge q}\,(\mathrm{Ax})}{r \vdash q \wedge r, p \wedge q}\,(\wedge\mathrm{R})}{\neg(p \wedge q), r \vdash q \wedge r}\,(\neg\mathrm{L})}{\neg(p \wedge q) \wedge r \vdash q \wedge r}\,(\wedge\mathrm{L})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r), q \wedge r}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)}\,(\vee\mathrm{R})$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z.B. $r \mapsto 1$ und $q, p \mapsto 0$.

# Hausübung

**Aufgabe H1** (6 Punkte)

(a) Sei $\Phi$ eine Menge von nicht negativen Hornformeln und $\mathcal{I} := \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Phi\}$ die Menge aller ihrer Modelle. Wir definieren eine Interpretation $\mathfrak{I}_0$ durch

$$\mathfrak{I}_0(p) = 1 \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{I}(p) = 1 \text{ für alle } \mathfrak{I} \in \mathcal{I}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{I}_0$ ebenfalls ein Modell von $\Phi$ ist. Wir nennen $\mathfrak{I}_0$ das *minimale Modell* von $\Phi$. (Warum?)

(b) Zeigen Sie, dass es Formelmengen $\Phi$ gibt, die keine minimalen Modelle besitzen. ($\Phi$ kann also nicht nur aus nicht negativen Hornformeln bestehen.)

(c) Sei $\Phi$ eine Menge von nicht negativen Hornformeln, $K$ die dazugehörige Menge von Hornklauseln und $\mathfrak{I}_0$ das minimale Modell von $\Phi$. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathrm{Res}^*(K)$ nur nicht negative Hornklauseln enhält (insbesondere also nicht die leere Klausel);

(ii) für jede Variable $p$, gilt

$$\{p\} \in \mathrm{Res}^*(K) \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{I}_0(p) = 1\,.$$

*Hinweis.* Beweisen Sie erst, dass

$$\mathfrak{I}_0(p) = 1 \quad \text{gdw} \quad \Phi \models p \quad \text{gdw} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(K \cup \{\neg p\})\,.$$

Benutzen Sie dabei die Korrektheit des Resolutionskalküls für die Richtung ($\Rightarrow$) und die Vollständigkeit (insbesondere Lemma 5.5 bzw. Lemma 5.8) für die Rückrichtung ($\Leftarrow$).

**Musterlösung:**

(a) Sei $(q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \to q$ eine Formel in $\varphi$. Angenommen, $\mathfrak{I}_0 \not\models (q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \to q$. Dann gilt $\mathfrak{I}_0(q_i) = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$, aber $\mathfrak{I}_0(q) = 0$. Nach Definition von $\mathfrak{I}_0$ gibt es also eine Interpretation $\mathfrak{I} \in \mathcal{I}$ mit $\mathfrak{I}(q) = 0$. Andererseits ist $\mathfrak{I}(q_i) = 1$ für alle $i$. Somit gilt $\mathfrak{I} \not\models (q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \to q$. Also ist $\mathfrak{I} \notin \mathcal{I}$. Widerspruch.

(b) $\varphi := \{p \vee q\}$ (oder $\neg p \vee \neg q = \neg(p \wedge q)$, eine negative Hornklausel).

(c) (i) Wenn wir zwei Hornklauseln $\{\neg q_1, \dots, \neg q_n, q\}$ und $\{\neg q_1', \dots, \neg q_m', q'\}$ resolvieren, dann muss dies bezüglich eines der positiven Literale $q$ oder $q'$ geschehen. Wir haben also etwa $q = q_1'$ und die Resolvente

$$\{\neg q_1, \dots, \neg q_n, \neg q_2', \dots, \neg q_m', q'\}$$

ist wieder eine Hornklausel. Wenn wir also mit einer Menge von Hornklauseln starten, dann enthalten wir durch Resolution nur Hornklauseln.

(ii) Zum Beweis des Hinweises: es gilt, dass $\mathfrak{I}_0(p) = 1$ gdw. für alle $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \Phi$ gilt $\mathfrak{I}(p) = 1$, also $\mathfrak{I} \models p$ gdw. $\Phi \models p$ gdw. $\Phi \cup \{\neg p\}$ unerfüllbar gdw. $\Box \in \mathrm{Res}^*(K \cup \{\neg p\})$. Wir beweisen nun die Aufgabe:

($\Rightarrow$) Nach Lemma 5.5 folgt aus $\{p\} \in \mathrm{Res}^*(K)$, dass $\Phi \models p$. Somit ist $\mathfrak{I}_0(p) = 1$.

($\Leftarrow$) Wenn $\mathfrak{I}_0(p) = 1$, dann gilt (mit Hilfe des Hinweises) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K \cup \{\neg p\})$. Das bedeutet, es gibt einen Ableitungsbaum aus den Klauseln aus $K$ und $\{\neg p\}$, der $\Box$ erzeugt. In diesem Baum muss die Klausel $\{\neg p\}$ vorkommen, denn sonst wäre $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$, im Widerspruch zu Aufgabenteil (i). Wenn man aber die Resolvente von $\{\neg p\}$ und einer Klausel $C$ bildet, ist das Ergebnis die Klausel $C \setminus p$. Wir können also im Ableitungsbaum alle Vorkommen von $\{\neg p\}$ streichen und dafür bei allen Klauseln, die unterhalb eines solchen $\{\neg p\}$ ursprünglich standen, $p$ hinzufügen. Damit erhalten wir eine gültige Ableitung deren letztes Element $\Box \cup \{p\} = \{p\}$ ist.

**Aufgabe H2** (6 Punkte)

$\preceq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preceq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big).$$

Sei $\mathcal{A} = (A, \preceq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2\}$ und $\preceq^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}$.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.
Hinweis:
 (i) Bringen Sie $\varphi$ in Negationsnormalform $\varphi'$, und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.
 (ii) Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von $\varphi'$ bedeuten.
 (iii) Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei $\psi$ eine zu

$$\exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big)$$

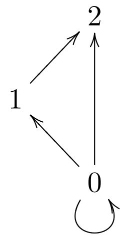
äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

**Musterlösung:**

(a) Eine Menge mit einer zweistelligen Relation ist i.A. ein (gerichteter) Graph, also kann man $\mathcal{A}$ folgendermaßen darstellen



und $\varphi^{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass es zu zwei Elementen $x_1$ und $x_2$ ein Element $x_3$ gibt, mit $x_3 \to x_1$ und $x_3 \to x_2$ und sodass es zu jedem $x_4$ mit $x_4 \to x_1$ und $x_4 \to x_2$ eine Kante $x_4 \to x_3$ gibt. Man überprüft leicht, dass für $x_1 \mapsto 2$ und $x_2 \mapsto 2$ kein $x_3$ mit der benötigten Eigenschaft existiert, also $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Als nächstes formen wir $\varphi$ in Negationsnormalform um:

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \to x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( \neg (x_4 \preceq x_1 \wedge x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big)}_{=:\varphi'}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ der Falsifizierer in der Spielposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ *eine Gewinnstrategie hat*: Angenommen der Falsifizierer zieht von der Position

$$\Big( \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big), (a_1, a_2, a_3, a_4) \Big)$$

nach

$$\Big( \forall x_2 \exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big), (2, a_2, a_3, a_4) \Big)$$

und von dort nach

$$\Big( \exists x_3 \Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big) \Big), (2, 2, a_3, a_4) \Big)$$

dann hat der Verifizierer drei Möglichkeiten zu ziehen:

$a_3 \mapsto 2$:

$$\Big( (x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \big( (\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3 \big), (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big( x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

und

$$\Big( x_3 \preceq x_1, (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 1$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2,2,1,a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2,2,1,a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2,2,1,1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \models 1 \preceq 2$.

$a_3 \mapsto 0$:

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2,2,0,a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (2,2,0,a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (2,2,0,1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 0$ und $\mathcal{A} \models 1 \preceq 2$.

Also hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie, und es gilt $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(b) Wir zeigen, dass der Verifizierer für alle $(a_1', a_2') \in A \times A \setminus \{(2,2)\}$ eine Gewinnstrategie hat:
Der Verifizierer zieht von $(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$ nach

$$\Big((x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2) \wedge \forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (a_1', a_2', 0, a_4)\Big)$$

Der Falsifizierer hat nun zwei Zugmöglichkeiten:

(1) Er zieht nach

$$\left(x_3 \preceq x_1 \wedge x_3 \preceq x_2, (a_1', a_2', 0, a_4)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preceq x$ für alle $x \in A$.

(2) Er zieht nach

$$\left(\forall x_4 \left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3\right), (a_1', a_2', 0, a_4)\right)$$

dann hat der Falsifizierer im nächsten Zug drei Möglichkeiten:

(i) Er zieht nach

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 0)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preceq 0$

(ii) Er zieht nach

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 1)\right)$$

oder

$$\left((\neg x_4 \preceq x_1 \vee \neg x_4 \preceq x_2) \vee x_4 \preceq x_3, (a_1', a_2', 0, 2)\right)$$

dann gewinnt der Verifizierer in zwei Zügen, da $a_1'$ oder $a_2'$ ungleich 2 ist und $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 1 \preceq 0$ bzw. $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 2 \preceq 0$ gelten.

### Aufgabe H3

**Zusatzaufgabe**

Lösen Sie das Rätsel (Nr. 5) auf der nächsten Seite (aus Lewis Carroll, *Symbolic Logic*, 1896)

(a) mit dem Resolutionskalkül.

(b) mit dem Sequenzenkalkül.

*Hinweis:* Arbeiten Sie z.B. mit Aussagenvariablen $p_{xy}$ für $x, y \in \{a, b, c, d, e, h\} \cup \{A, B, C, D, E, H\}$ mit der Bedeutung „$x$ ist in derselben Gruppe wie $y$"; hierbei steht etwa $a$ für Mr Acres, $A$ für Mrs Acres, etc.

*EIGHT PROBLEMS FROM PART II.* 191

**(18) People, who are popular and worthy of praise, either are public benefactors or else are unassuming.**

**Univ. "persons"; *a* = able to keep a secret; *b* = clear-headed; *c* = constantly talking; *d* = deserving praise; *e* = exhibited in shop-windows; *h* = expressing oneself well; *k* = fit to be an M.P.; *l* = influential; *m* = never-to-be-forgotten; *n* = popular; *r* = public benefactors; *s* = unassuming; *t* = using one's influence for good objects; *v* = well-educated; *w* = women; *z* = worth one's weight in gold.**

**5.**

**Six friends, and their six wives, are staying in the same hotel; and they all walk out daily, in parties of various size and composition. To ensure variety in these daily walks, they have agreed to observe the following Rules:—**

**(1) If Acres is with (i.e. is in the same party with) his wife, and Barry with his, and Eden with Mrs. Hall, Cole must be with Mrs. Dix;**

**(2) If Acres is with his wife, and Hall with his, and Barry with Mrs. Cole, Dix must *not* be with Mrs. Eden;**

**(3) If Cole and Dix and their wives are all in the same party, and Acres *not* with Mrs. Barry, Eden must *not* be with Mrs. Hall;**

**(4) If Acres is with his wife, and Dix with his, and Barry *not* with Mrs. Cole, Eden must be with Mrs. Hall;**

**(5) If Eden is with his wife, and Hall with his, and Cole with Mrs. Dix, Acres must *not* be with Mrs. Barry;**

**(6) If Barry and Cole and their wives are all in the same party, and Eden *not* with Mrs. Hall, Dix must be with Mrs. Eden.**

**The Problem is to prove that there must be, every day, at least *one* married couple who are not in the same party.**

**Musterlösung:**

(a) Wir formalisieren erst die Aussagen mit Hilfe der Aussagenvariablen $p_{xy}$:

1. $\varphi_1 := (p_{aA} \wedge p_{bB} \wedge p_{eH}) \rightarrow p_{cD}$
2. $\varphi_2 := (p_{aA} \wedge \varphi_{hH} \wedge p_{bC}) \rightarrow \neg p_{dE}$
3. $\varphi_3 := (p_{cC} \wedge p_{dD} \wedge p_{cD} \wedge \neg p_{aB}) \rightarrow \neg p_{eH}$
4. $\varphi_4 := (p_{aA} \wedge p_{dD} \neg p_{bC}) \rightarrow p_{eH}$
5. $\varphi_5 := (p_{eE} \wedge p_{hH} \wedge p_{cD}) \rightarrow \neg p_{aB}$
6. $\varphi_6 := (p_{bB} \wedge p_{cC} \wedge p_{bC} \wedge \neg p_{eH}) \rightarrow p_{dE}$

7. $\psi := \neg p_{aA} \vee \neg p_{bB} \vee \neg p_{cC} \vee \neg p_{dD} \vee \neg p_{eE} \vee \neg p_{hH}$

Zu zeigen ist, dass $\varphi_1, \ldots, \varphi_6 \models \psi$. Deshalb schreiben wir $\varphi_1$ bis $\varphi_6$ und $\neg\psi$ in Klauselform um:

1. $\{\{\neg p_{aA}, \neg p_{bB}, \neg p_{eH}, p_{cD}\}\}$
2. $\{\{\neg p_{aA}, \neg \varphi_{hH}, \neg p_{bC}, \neg p_{dE}\}\}$
3. $\{\{\neg p_{cC}, \neg p_{dD}, \neg p_{cD}, p_{aB}, \neg p_{eH}\}\}$
4. $\{\{\neg p_{aA}, \neg p_{dD}, p_{bC}, p_{eH}\}\}$
5. $\{\{\neg p_{eE}, \neg p_{hH}, \neg p_{cD}, \neg p_{aB}\}\}$
6. $\{\{\neg p_{bB}, \neg p_{cC}, \neg p_{bC}, p_{eH}, p_{dE}\}\}$
7. $\{\{p_{aA}\}, \{p_{bB}\}, \{p_{cC}\}, \{p_{dD}\}, \{p_{eE}\}, \{p_{hH}\}\}$

Ziel ist, die leere Klausel abzuleiten aus der Vereinigung der obenstehenden Klauselmengen.

Erstens können wir Resolution mit Klauseln aus 7 anwenden um die negierten Aussagen von der Form $p_{xX}$ in 1–6 zu eliminieren. Also sind die folgenden Klauseln mit Resolution ableitbar:

1. $\{\neg p_{eH}, p_{cD}\}$
2. $\{\neg p_{bC}, \neg p_{dE}\}$
3. $\{\neg p_{cD}, p_{aB}, \neg p_{eH}\}$
4. $\{p_{bC}, p_{eH}\}$
5. $\{\neg p_{cD}, \neg p_{aB}\}$
6. $\{\neg p_{bC}, p_{eH}, p_{dE}\}$

Mit diesen Klauseln ist dann $\{\neg p_{eH}\}$ ableitbar:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p_{eH}, p_{cD}\} \arrow[d] & \{\neg p_{cD}, \neg p_{aB}\} \arrow[dl] & & \\
\{\neg p_{eH}, \neg p_{aB}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{cD}, p_{aB}, \neg p_{eH}\} \arrow[dl] & \\
& \{\neg p_{eH}, \neg p_{cD}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{eH}, p_{cD}\} \arrow[dl] \\
& & \{\neg p_{eH}\} &
\end{tikzcd}$$

Und damit auch $\square$:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p_{bC}, \neg p_{dE}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{bC}, p_{eH}, p_{dE}\} \arrow[dl] & \\
& \{\neg p_{bC}, p_{eH}\} \arrow[dr] & & \{p_{bC}, p_{eH}\} \arrow[dl] \\
\{\neg p_{eH}\} \arrow[dr] & & \{p_{eH}\} \arrow[dl] & \\
& \square & &
\end{tikzcd}$$

(b) Seien $\Gamma_0 = \{(p_{aA} \wedge p_{bB} \wedge p_{eH}) \to p_{cD}, (p_{aA} \wedge p_{hH} \wedge p_{bB}) \to p_{dE}, (p_{cC} \wedge p_{dD} \wedge p_{cD} \wedge \neg p_{aB}) \to \neg p_{eH}, (p_{aA} \wedge p_{dD} \wedge \neg p_{bC}) \to p_{eH}, (p_{eE} \wedge p_{hH} \wedge p_{cD}) \to \neg p_{aB}, (p_{bB} \wedge p_{cC} \wedge p_{bC} \wedge \neg p_{eH}) \to p_{dE}\}$, $\Gamma_1 = \{p_{aA}, p_{bB}, p_{cC}, p_{dD}, p_{eE}, p_{hH}\}$ und $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Es genügt zu zeigen, dass $\Gamma \vdash$ ableitbar ist, da hieraus mit wiederholter Anwendung von $(\neg R)$ die Sequenz $\Gamma_0 \vdash \neg p_{aA}, \neg p_{bB}, \ldots, \neg p_{hH}$ folgt und daraus wieder durch wiederholte Anwendung von $(\vee R)$ die Sequenz $\Gamma_0 \vdash \neg p_{aA} \vee \neg p_{bB} \vee \ldots \vee \neg p_{hH}$.

Durch Zusammensetzung der folgenden vier Ableitungen bekommt man die erwünschte Ableitung von $\Gamma \vdash$. Diese Ableitungen sind so zu verstehen:

(i) Der Ausdruck $xy$ is eine verkürzte Schreibweise für die Aussagevariable $p_{xY}$ (z.B. $cd$ für $p_{cD}$).

(ii) Aussagen von der Form $xx \wedge yy$ sind einfach aus $\Gamma_1$ (und damit aus $\Gamma$) ableitbar, so Sequenzen von der Form $\Gamma \vdash xx \wedge yy$ können als Axiome behandelt werden.

(iii) Eine Situation die oft auftritt, ist, dass man $\Gamma \vdash \varphi, \Delta$ und $\Gamma, \psi \vdash \Delta$ ableitet, mit $\varphi \to \psi \in \Gamma$ (zur Erinnering: $\varphi \to \psi$ ist eine Abkürzung für $\neg\varphi \vee \psi$). Hieraus folgt $\Gamma \vdash \Delta$, wie folgt:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta} \qquad \overline{\Gamma, \psi \vdash \Delta}}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta.}$$

Da $\Gamma = \Gamma \cup \{\varphi \to \psi\}$, haben wir hiermit auch $\Gamma \vdash \Delta$ abgeleitet. Diese Schritte werden wie folgt abgekürzt:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \in \Gamma \vdash \Delta.}$$

(iv) Die folgende abgeleitete Regel ("weakening")

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

ist oft implizit angewand worden in den $(\vee L)$ und $(\wedge R)$ Regeln um gleiche Kontexten zu erzwingen. So folgt z.B. mit "weakening" und der üblichen $(\wedge R)$-Regel, dass man die $(\wedge R)$-Regel auch so anwenden kann:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma' \vdash \varphi', \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi \wedge \varphi', \Delta, \Delta'}.$$

Erstens leiten wir $\Gamma, cd, eh \vdash$ ab.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash ee \wedge hh} \qquad \overline{\Gamma, cd \vdash cd}}{\Gamma, cd \vdash ee \wedge hh \wedge cd} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash cc \wedge dd} \qquad \overline{\Gamma, cd \vdash cd}}{\Gamma, cd \vdash cc \wedge dd \wedge cd} \qquad \overline{\Gamma, \neg ab \vdash \neg ab}}{\Gamma, cd, \neg ab \vdash cc \wedge dd \wedge cd \wedge \neg ab} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma, eh \vdash eh}}{\Gamma, eh, \neg eh \vdash}}{\Gamma, (cc \wedge dd \wedge cd \wedge \neg ab) \to \neg eh \in \Gamma, cd, \neg ab, eh \vdash}}{\Gamma, cd, (ee \wedge hh \wedge cd) \to \neg ab \in \Gamma, eh \vdash}$$

Daraus folgt dann $\Gamma, eh \vdash$:

$$\dfrac{\overline{\Gamma, cd, eh \vdash} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma \vdash aa \wedge bb} \qquad \overline{\Gamma, eh \vdash eh}}{\Gamma, eh \vdash aa \wedge bb \wedge eh}}{\Gamma, (aa \wedge bb \wedge eh) \to cd \in \Gamma, eh \vdash}$$

Das können wir dann anwenden um $\Gamma, \Delta \vdash \neg p_{bC}$ abzuleiten:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, \vdash bb \wedge cc} \qquad \overline{\Gamma, bc \vdash bc}}{\Gamma, bc \vdash bb \wedge cc \wedge bc} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma, eh \vdash}}{\Gamma \vdash \neg eh}}{\Gamma, bc \vdash bb \wedge cc \wedge bc \wedge \neg eh} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash aa \wedge hh} \qquad \overline{\Gamma, bc \vdash bc}}{\Gamma, bc \vdash aa \wedge hh \wedge bc} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma, de \vdash de}}{\Gamma, de, \neg de \vdash}}{\Gamma, (aa \wedge hh \wedge bc) \to \neg de \in \Gamma, bc, de \vdash}}{\Gamma, (bb \wedge cc \wedge bc \wedge \neg eh) \to de \in \Gamma, bc \vdash}}{\Gamma \vdash \neg bc}$$

Mit Hilfe der letzten zwei Ableitungen folgt dann $\Gamma \vdash$, wie erwünscht.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash aa \wedge dd} \qquad \overline{\Gamma \vdash \neg bc}}{\Gamma \vdash aa \wedge dd \wedge \neg bc} \qquad \overline{\Gamma, eh \vdash}}{\Gamma, (aa \wedge dd \wedge \neg bc) \to eh \in \Gamma \vdash}$$