



5. Übungsblatt zu FGdI 1

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b\}, \{X_0, X, Y\}, P, X_0)$ mit

$$\begin{aligned} P: X_0 &\rightarrow aXaY \\ X &\rightarrow aXa \mid Y \\ Y &\rightarrow bY \mid \epsilon. \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die von G erzeugte Sprache.
- Bestimmen Sie eine zu G äquivalente Grammatik G' ohne ϵ -Produktionen.
- Zeigen Sie, dass die Sprache

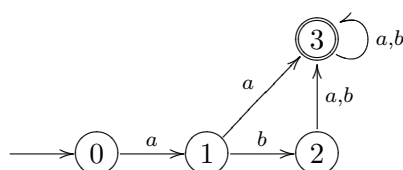
$$L = \{x \in \{a, b\}^* : |x|_a = |x|_b\}$$

kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik angeben, die diese Sprache erzeugt. (Begründen Sie Ihre Antwort!) Vgl. Übung 3.1.13 im Skript.

Aufgabe G2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

- Betrachten Sie den Automaten \mathcal{A} :



Geben Sie eine reguläre Grammatik an, die die Sprache $L(\mathcal{A})$ erzeugt.

- Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Grammatiken G_1, G_2 mit Startsymbol X dieselbe reguläre Sprache erzeugen:

$$\begin{aligned} G_1: X &\rightarrow XaXaX \mid Y \\ Y &\rightarrow YY \mid b \mid \epsilon \\ G_2: X &\rightarrow aY \mid bX \mid \epsilon \\ Y &\rightarrow bY \mid aZ_1 \mid aX \\ Z_1 &\rightarrow aZ_2 \mid bX \mid \epsilon \\ Z_2 &\rightarrow bY \mid aZ_1 \mid aX \end{aligned}$$

Dazu übersetzt man zunächst die zweite, rechtslineare Grammatik in einen (möglichst kompakten) DFA um die erzeugte Sprache zu identifizieren. Dann zeigt man, dass die erste Grammatik ebenfalls genau diese Sprache erzeugt (mit Induktionsbeweisen für die beiden Inklusionen!).

Aufgabe G3

Sei

$$L = \{ss^{-1}t : s, t \in \{a, b\}^+\},$$

wobei s^{-1} die Umdrehung von s bezeichnet (wie auf dem letzten Übungsblatt definiert).

- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für L an.
- Zeigen Sie, dass L die Aussage im Pumping Lemma erfüllt.
- Zeigen Sie, dass L trotzdem nicht regulär ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Myhill-Nerode!

Hausübung

Aufgabe H1

(6 Punkte)

Die Grammatik $G = (\Sigma, V, P, S)$ mit $\Sigma = \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{9}, \mathbf{:}, \mathbf{=}, \mathbf{(}, \mathbf{)}\}$ und $V = \{S, E\}$ spezifiziert eine einfache Programmiersprache, wobei P geben sei durch

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{y} := \mathbf{0} \mid \mathbf{y} := \mathbf{1} \mid \mathbf{if } E \mathbf{ then } S \mathbf{ else } S \mid \mathbf{if } E \mathbf{ then } S \\ E &\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \mid \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(Die Nichtterminale S und E stehen für Anweisungen (*statements*) und Ausdrücke (*expressions*)).

- Zeichnen Sie den Ableitungsbaum (siehe Skript, Übung 3.1.5) zum Wort

`if y = 0 then if x = 0 then y:=1 else y:=0 else y:=1`

- Finden Sie ein Wort mit zwei verschiedenen Ableitungsbäumen.
- (c*) Geben Sie eine zu G äquivalente Grammatik an, bei der jedes Wort höchstens einen Ableitungsbaum besitzt.

Zusatz: Überlegen Sie sich, welche Rolle die eindeutige Ableitbarkeit bei der Implementierung eines Compilers spielt.

Aufgabe H2

(6 Punkte)

Sei \mathcal{A} ein DFA mit n Zuständen. Der Beweis des Pumping Lemmas zeigt dann, dass es für jedes Wort $x \in L(\mathcal{A})$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = u \cdot v \cdot w$ mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$ gibt, so dass

$$u \cdot v^m \cdot w \in L(\mathcal{A})$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$.

- Zeigen Sie, dass aus $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ folgt, dass es ein Wort $x \in L(\mathcal{A})$ gibt mit $|x| < n$.
Hinweis: Betrachten Sie ein Wort $x \in L(\mathcal{A})$, das minimale Länge hat.
- Wie können Sie die Tatsache aus (a) benutzen um das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen zu entscheiden?
- Zeigen Sie, dass $L(\mathcal{A})$ genau dann unendlich ist, wenn es ein Wort $x \in L(\mathcal{A})$ mit $n \leq |x| < 2n$ gibt.

Hinweis: Wenn die Sprache $L(\mathcal{A})$ unendlich ist, gibt es Wörter die zu $L(\mathcal{A})$ gehören und mindestens Länge n haben (warum?). Unter diesen, betrachten Sie ein Wort minimaler Länge.