



## 4. Übungsblatt zu FGdI 1

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1

Für ein Wort  $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$  wird  $w^{-1}$  durch  $a_n \dots a_1$  definiert (d.h.  $w$  wird rückwärts gelesen).

- (a) Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache  $L$  auch die Umkehrung

$$\text{rev}(L) := \{w^{-1} \in \Sigma^* : w \in L\}$$

regulär ist, indem Sie zeigen, wie aus einem Automaten, der die Sprache  $L$  erkennt, ein Automaten, der die Sprache  $\text{rev}(L)$  erkennt, konstruiert werden kann.

Hinweis: Man kann sich zuerst überlegen, dass man aus einem NFA, der nur einen akzeptierenden Zustand hat, durch "Umkehrung" der Transitionen einen geeigneten NFA bekommen kann. Andere Fälle lassen sich dann mit den übrigen Abschlusseigenschaften darauf zurückführen. (Dies ist Übung 2.2.17 im Skript.)

- (b) Zeigen Sie wieder, dass für jede reguläre Sprache  $L$  auch die Umkehrung  $\text{rev}(L)$  regulär ist, aber jetzt indem Sie zeigen, wie man aus einem regulären Ausdruck für die Sprache  $L$  einen regulären Ausdruck für  $\text{rev}(L)$  gewinnen kann.

#### Musterlösung:

- (a) Sei  $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A)$  ein NFA. Für jedes  $a \in A$  definieren wir

$$\mathcal{A}_a = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, \{a\}).$$

Das heißt:  $\mathcal{A}_a$  ist wie  $\mathcal{A}$ , aber hat nur  $a$  als akzeptierenden Zustand. Wir haben  $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{a \in A} L(\mathcal{A}_a)$  und  $\text{rev}(L(\mathcal{A})) = \bigcup_{a \in A} \text{rev}(L(\mathcal{A}_a))$ . Weil reguläre Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen sind, brauchen wir nur einzusehen, dass  $\text{rev}(L(\mathcal{A}))$  regulär ist für jeden Automaten  $\mathcal{A}$  mit nur einem akzeptierenden Zustand.

Sei also  $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, \{a\})$  ein NFA mit einem akzeptierenden Zustand, der die Sprache  $L$  erkennt. Wir bestimmen einen Automaten  $\mathcal{A}^{\text{rev}}$ , der genau  $\text{rev}(L)$  erkennt:

$$\mathcal{A}^{\text{rev}} = (\Sigma, Q, a, \Delta^{\text{rev}}, \{q_0\}),$$

wobei

$$(q, x, q') \in \Delta^{\text{rev}} \Leftrightarrow (q', x, q) \in \Delta.$$

Man beweist jetzt mit Induktion über  $n$ , dass es einen Lauf von  $q_0$  nach  $q_n$  auf  $w$  in  $\mathcal{A}$  genau dann gibt, wenn es einen Lauf von  $q_n$  nach  $q_0$  auf  $w^{-1}$  in  $\mathcal{A}^{\text{rev}}$  gibt. Daraus folgt dann, dass  $L(\mathcal{A}^{\text{rev}}) = \text{rev}(L)$ . Wir schließen, dass auch  $\text{rev}(L)$  regulär ist.

- (b) Man kann induktiv über den Aufbau regulärer Ausdrücke  $\alpha \in \text{REG}(\Sigma)$  einen neuen regulären Ausdruck  $\text{rv}(\alpha)$  konstruieren, wie folgt:
- (i)  $\text{rv}(\emptyset) := \emptyset$ ,

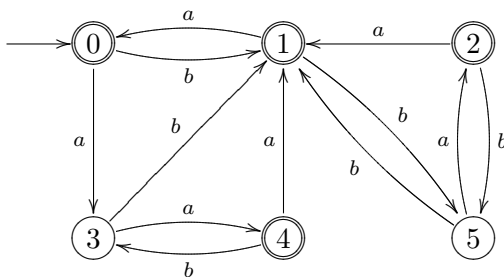
- (ii)  $rv(a) := a$  für jedes  $a \in \Sigma$ ,
- (iii)  $rv(\alpha + \beta) := rv(\alpha) + rv(\beta)$ ,
- (iv)  $rv(\alpha\beta) := rv(\beta)rv(\alpha)$ ,
- (v)  $rv(\alpha^*) := (rv(\alpha))^*$ .

Jetzt kann man leicht mit Induktion zeigen, dass für  $\alpha \in REG(\Sigma)$

$$L(rv(\alpha)) = rev(L(\alpha)).$$

**Aufgabe G2**

Finden Sie einen äquivalenten DFA minimaler Größe für den folgenden DFA:



Geben Sie jedesmal, wenn Sie feststellen, dass zwei Zustände  $q$  und  $q'$  nicht identifiziert werden können, ein Wort  $w$  an, für das diese Unterscheidung notwendig ist, d.h. ein Wort  $w$ , das zu  $L_q$  gehört, aber nicht zu  $L_{q'}$  (oder umgekehrt), wobei:

$$L_q = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q, w) \in A\}.$$

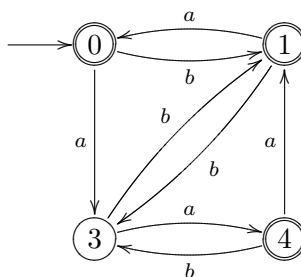
**Musterlösung:**

Wir bestimmen die Relationen  $\not\sim_i$ .

$\not\sim_0$	0	1	2	3	4	5	$\not\sim_1$	0	1	2	3	4	5	$\not\sim_2$	0	1	2	3	4	5	
0				×		×	0		×	×	×	×	×	0		×	×	×	×	×	×
1				×		×	1	×			×		×	1	×		×	×	×	×	×
2					×	×	2	×			×		×	2	×	×		×			×
3	×	×	×				3	×	×	×		×		3	×	×	×				×
4					×	×	4	×			×		×	4	×	×		×			×
5	×	×	×			×	5	×	×	×		×		5	×	×	×				×

In Schritt 0 macht jedes mal das leere Wort  $\epsilon$  einen Unterschied, in Schritt 1 jedesmal das Wort  $a$  und in Schritt 2 jedesmal das Wort  $aa$  (andere Lösungen gibt es selbstverständlich auch!).

Da  $\not\sim_2 = \not\sim_3$ , ist die Relation  $\not\sim$  durch die letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände 2 und 4, bzw. 3 und 5 identifizieren können. Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:



**Aufgabe G3**

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

- (a)  $L_1 = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* : n < m\}$
- (b)  $L_2 = \{a^{n^2} \in \{a\}^* : n \geq 0\}$
- (c) PALINDROM =  $\{w \in \{a, b\}^* : w = w^{-1}\}$  (Dies ist Übung 2.5.4 im Skript.)

**Musterlösung:**

- (a) Nehmen wir an, dass  $L_1$  regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas gibt es dann eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass jedes  $x \in L_1$  mit  $|x| \geq n$  sich als  $x = u \cdot v \cdot w$  mit  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$  schreiben lässt, wobei für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  eine solche natürliche Zahl. Wir betrachten das Wort

$$x = a^n b^{n+1}.$$

Offensichtlich ist  $x \in L_1$  und  $|x| \geq n$ . Jetzt soll es  $u, v, w$  geben, mit  $x = u \cdot v \cdot w$ ,  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$ . Weil  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , ist  $v$  der Form  $v = a^k$  mit  $k > 0$ . Das heißt, dass  $u \cdot v^2 \cdot w = a^{n+k} b^{n+1}$  nicht mehr  $b$  als  $a$  enthält. Das widerspricht  $u \cdot v^2 \cdot w \in L_1$ . Wir schließen, dass  $L_1$  nicht regulär ist.

- (b) Wir verwenden hier, dass

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > n$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Für ein  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir das Wort

$$x = a^{(n+1)^2}.$$

Offensichtlich  $x \in L_2$  und  $|x| = (n+1)^2 \geq n$ . Wir überprüfen, ob es  $u, v, w$  geben kann, mit  $x = u \cdot v \cdot w$ ,  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$ . Insbesondere soll auch gelten:  $u \cdot w \in L_2$  für  $m = 0$ . Weil  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , ist  $v$  der Form  $v = a^k$  mit  $n \geq k > 0$ . Das heißt, dass wir die folgende Abschätzungen haben für die Länge von  $u \cdot w = a^{(n+1)^2 - k}$ :

$$(n+1)^2 > (n+1)^2 - k = |u \cdot w| \geq (n+1)^2 - n > n^2.$$

Da es keine Quadratzahlen zwischen  $n^2$  und  $(n+1)^2$  gibt, ist  $|u \cdot w|$  keine Quadratzahl und es gilt  $u \cdot w \notin L_2$ . Da dieses Argument für jedes  $n \in \mathbb{N}$  funktioniert schließen wir, dass  $L_2$  das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

- (c) Nehmen wir an, dass PALINDROM regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas gibt es dann eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass jedes Palindrom  $x$  mit  $|x| \geq n$  sich als  $x = u \cdot v \cdot w$  schreiben lässt, mit  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , wobei für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $u \cdot v^m \cdot w$  ein Palindrom ist. Sei  $n \in \mathbb{N}$  also diese natürliche Zahl. Wir betrachten das Wort

$$x = a^n b a^n.$$

Offensichtlich ist  $x$  ein Palindrom mit  $|x| \geq n$ . Jetzt sollte es  $u, v, w$  geben, mit  $x = u \cdot v \cdot w$ ,  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $u \cdot v^m \cdot w$  ein Palindrom ist. Insbesondere soll für  $m = 0$  das Wort  $u \cdot w$  ein Palindrom sein. Weil  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , ist  $v$  der Form  $v = a^k$  mit  $k > 0$ . Das heißt, dass  $u \cdot w = a^{n-k} b a^n$  für ein  $k > 0$ , und damit also kein Palindrom. Widerspruch!

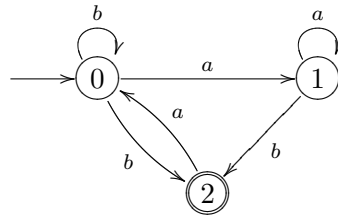
Also ist das Pumping Lemma verletzt und wir dürfen schließen, dass die Sprache der Palindrome nicht regulär sein kann.

## Hausübung

### Aufgabe H1

Betrachten Sie den NFA  $\mathcal{A}$

(6 Punkte)



- (a) Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für  $L(\mathcal{A})$ .
- (b) Konstruieren Sie einen DFA  $\mathcal{B}$  mit  $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$ .
- (c) Konstruieren Sie einen minimalen DFA  $\mathcal{C}$  mit  $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A})$ .

#### Musterlösung:

- (a) Eine mögliche Lösung ist:

$$(b + aa^*ba + ba)^*(b + aa^*b)$$

- (b) Wir verwenden den Potenzmengentrick:

$\delta$	$a$	$b$
{0}	{1}	{0, 2}
{1}	{1}	{2}
{0, 2}	{0, 1}	{0, 2}
{2}	{0}	$\emptyset$
{0, 1}	{1}	{0, 2}
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Die akzeptierenden Zustände sind  $\{0, 2\}$  und  $\{2\}$ .

- (c) Wir bestimmen die Relationen  $\sim_i$ .

$\sim_0$	{0}	{1}	{0,2}	{2}	{0,1}	$\emptyset$
{0}			×	×		
{1}			×	×		
{0,2}	×	×			×	×
{2}	×	×			×	×
{0,1}			×	×		
$\emptyset$			×	×		

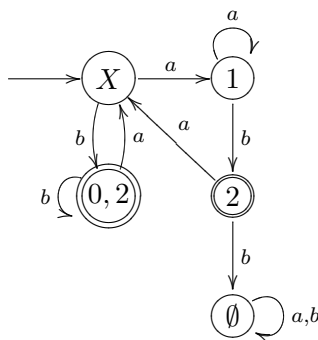
  

$\sim_1$	{0}	{1}	{0,2}	{2}	{0,1}	$\emptyset$
{0}			×	×		×
{1}			×	×		×
{0,2}	×	×		×	×	×
{2}	×	×	×		×	×
{0,1}			×	×		×
$\emptyset$	×	×	×	×	×	

$\sim_2$	{0}	{1}	{0,2}	{2}	{0,1}	$\emptyset$
{0}		×	×	×		×
{1}	×		×	×	×	×
{0,2}	×	×		×	×	×
{2}	×	×	×		×	×
{0,1}		×	×	×		×
$\emptyset$	×	×	×	×	×	

Da  $\sim_3 = \sim_2$ , ist die Relation  $\sim$  durch die letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände {0} und {0,1} identifizieren können (wir nennen den neuen Zustand  $X$ ). Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:

**Aufgabe H2**

(6 Punkte)

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(a)  $L_1 = \{x \in \Sigma^* : 2|x|_a = |x|_b\}$

(b\*) Zusatzaufgabe:

$$L_2 = \{a^n b^m \in \Sigma^* : \text{ggT}(n, m) = 1\}$$

Hinweise:

- $\text{ggT}(n, m)$  bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von  $n, m$ .
- Verwenden Sie in Aufgabe (b\*), dass es beliebig große Primzahlen gibt (wobei eine Primzahl eine Zahl größer als 1 ist, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist).

**Musterlösung:**

- (a) Sei
- $n \in \mathbb{N}$
- . Wir betrachten das Wort

$$x = a^n b^{2n}.$$

Offensichtlich  $x \in L_2$  und  $|x| \geq n$ . Wir überprüfen, ob es  $u, v, w$  geben kann, mit  $x = u \cdot v \cdot w$ ,  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$ . Insbesondere soll auch gelten:  $u \cdot w \in L_2$  für  $m = 0$ . Weil  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , ist  $v$  der Form  $v = a^k$  mit  $k > 0$ . Also ist  $u \cdot w = a^{n-k} b^{2n}$  und da  $k > 0$ , gilt  $u \cdot w \notin L_1$ . Da diese Argumentation für alle  $n$  gilt, schließen wir, dass  $L_1$  das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

- (b) Nehmen wir an, dass
- $L_2$
- regulär sei. Wegen des Pumping Lemmas gibt es dann eine natürliche Zahl
- $n \in \mathbb{N}$
- , so dass jedes
- $x \in L_2$
- mit
- $|x| \geq n$
- sich als
- $x = u \cdot v \cdot w$
- schreiben lässt, mit
- $|u \cdot v| \leq n$
- und
- $|v| > 0$
- , wobei für alle
- $m \in \mathbb{N}$
- auch
- $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$
- . Sei
- $n \in \mathbb{N}$
- eine solche natürliche Zahl. Zu einer Primzahl
- $p > n + 1$
- betrachte das Wort

$$x = a^p b^{(p-1)!}.$$

Offensichtlich  $x \in L_2$  und  $|x| \geq n$ . Jetzt soll es  $u, v, w$  geben, mit  $x = u \cdot v \cdot w$ ,  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$ . Insbesondere soll auch gelten:  $u \cdot w \in L_2$  für  $m = 0$ . Weil  $|u \cdot v| \leq n$  und  $|v| > 0$ , ist  $v$  der Form  $v = a^k$  mit  $0 < k \leq n < p - 1$ . Das heißt, dass  $u \cdot w = a^{p-k} b^{(p-1)!}$ , also teilt  $(p - k) > 1$  sowohl die Anzahl von  $a$  als die Anzahl von  $b$  in  $u \cdot w$ . Das widerspricht  $u \cdot w \in L_2$ . Wir schließen, dass  $L_2$  nicht regulär ist.



Veranstalter: Fachschaft Mathematik der TU Darmstadt

Kartenvorverkauf ab 03.05.2010

Weitere Informationen auf [www.mathebau.de/matheball](http://www.mathebau.de/matheball)

Mit freundlicher Unterstützung von

