

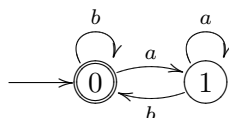


3. Übungsblatt zu FGdI 1

Gruppenübung

Aufgabe G1

- (a) Welche Σ -Sprache mit $\Sigma = \{a, b\}$ wird von dem folgenden DFA \mathcal{A} akzeptiert?



- (b) Beschreiben Sie $L(\mathcal{A})$ durch einen regulären Ausdruck.

Musterlösung:

- (a) $L(\mathcal{A})$ besteht aus den a/b -Folgen, in denen nach jedem a irgendwann ein b folgt. Anders gesagt besteht die Sprache aus allen Folgen, die auf b enden und dem leeren Wort.
 (b) Mögliche reguläre Ausdrücke sind: $(b + aa^*b)^*$, $(a + b)^*ab^*b + b^*$, oder auch $\emptyset^* + (a + b)^*b$.

Aufgabe G2

L und M seien Σ -Sprachen.

- (a) Zeigen Sie, dass L^* die kleinste Sprache ist, die L und das leere Wort ϵ enthält und unter Konkatenation abgeschlossen ist, d.h. dass für alle $v, w \in L^*$ gilt

$$v, w \in L^* \Rightarrow vw \in L^*.$$

Bemerkung: Die kleinste Sprache mit diesen Abschlusseigenschaften ist auch der Durchschnitt aller solcher Sprachen (warum?).

- (b) Zeigen sie mit Hilfe von (a), dass für den *-Operator folgende Aussagen gelten:

$$\begin{aligned} L \subseteq M &\Rightarrow L^* \subseteq M^* && \text{(Monotonie)} \\ L^{**} &= L^* && \text{(Idempotenz)} \end{aligned}$$

- (c) Verwenden Sie (a) und (b) um zu zeigen, dass

$$(L + M)^* = (L^*M^*)^*.$$

Musterlösung:

- (a) Wir erinnern an die Definition des Sternoperators:

$$L^* = \{l_1 \cdot \dots \cdot l_n : l_1, \dots, l_n \in L, n \in \mathbb{N}\}.$$

Für $n = 0$ heißt das, dass $\epsilon \in L^*$ und für $n = 1$, dass $L \subseteq L^*$. L^* ist auch unter Konkatenation abgeschlossen, da für $v = l_1 \cdot \dots \cdot l_n$ und $w = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$ mit

$l_i, m_j \in L$ gilt, dass $v \cdot w = l_1 \cdot \dots \cdot l_n \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_k \in L^*$. Also hat L^* alle gewünschten Eigenschaften.

Wir zeigen jetzt, dass L^* die kleinste Sprache mit diesen Eigenschaften ist. Sei M also eine Sprache die L und ϵ enthält und unter Konkatenation abgeschlossen ist. Schreiben wir $L_n = \{l_1 \cdot \dots \cdot l_n : l_1, \dots, l_n \in L\}$. Wir zeigen mit Induktion, dass $L_n \subseteq M$. Daraus folgt dann, dass $L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n \subseteq M$.

Induktionsanfang: $L_0 = \{\epsilon\} \subseteq M$.

Induktionsschritt: wir nehmen an, dass $L_n \subseteq M$ und betrachten ein beliebiges Element $l_1 \cdot \dots \cdot l_n \cdot l_{n+1}$ (mit $l_i \in L$) aus L_{n+1} . $l_1 \cdot \dots \cdot l_n \in L_n$ und deshalb folgt, nach der Induktionsannahme, dass $l_1 \cdot \dots \cdot l_n \in M$. Da $l_{n+1} \in L \subseteq M$ und M unter Konkatenation abgeschlossen ist, folgt $l_1 \cdot \dots \cdot l_n \cdot l_{n+1} \in M$.

- (b) Wir zeigen, dass der $*$ -Operator monoton ist, d.h. dass $L \subseteq M \Rightarrow L^* \subseteq M^*$: Angenommen $L \subseteq M$. Dann ist M^* eine Sprache, die L und ϵ enthält und unter Konkatenation abgeschlossen ist. Da L^* die kleinste Sprache ist, die diese Eigenschaften hat, folgt $L^* \subseteq M^*$.

Wir zeigen jetzt die Idempotenz, d.h. $L^* = L^{**}$. Aus der Monotonie folgt sofort, dass $L^* \subseteq L^{**}$, d.h. um die Idempotenz zu beweisen, genügt es, $L^{**} \subseteq L^*$ zu zeigen. Die Sprachen L^* und L^{**} enthalten L^* und ϵ und sind unter Konkatenation abgeschlossen. Aus oben gezeigtem folgt, dass L^{**} die kleinste Sprache mit diesen Eigenschaften ist, daher $L^{**} \subseteq L^*$.

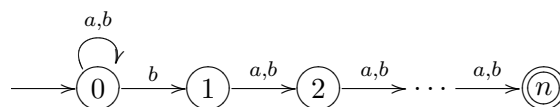
- (c) $(L + M)^* \subseteq (L^*M^*)^*$: Es genügt $L + M \subseteq L^*M^*$, zu zeigen, da mit der Monotonie des $*$ -Operators daraus die Aussage folgt. Sei deshalb $w \in L + M$. Dann gilt $w \in L$ oder $w \in M$. Nehmen wir an, dass $w \in L$. Dann auch $w \in L^*$, und $w = w \cdot \epsilon \in L^*M^*$. Der Fall $w \in M$ geht analog.

$(L^*M^*)^* \subseteq (L + M)^*$: Es genügt $L^*M^* \subseteq (L + M)^*$ zu zeigen, weil daraus mit der Monotonie und der Idempotenz des $*$ -Operators folgt, dass $(L^*M^*)^* \subseteq (L + M)^{**} = (L + M)^*$.

Da $L \subseteq L + M$, folgt wieder mit der Monotonie, dass $L^* \subseteq (L + M)^*$. Analog gilt auch $M^* \subseteq (L + M)^*$. Da $(L + M)^*$ unter Konkatenation abgeschlossen ist, können wir jetzt schließen, dass $L^*M^* \subseteq (L + M)^*$.

Aufgabe G3

Betrachten Sie den folgenden NFA \mathcal{A}_n :



- (a) Bestimmen Sie $L(\mathcal{A}_n)$.
 (b) Bestimmen Sie einen DFA \mathcal{B} , der die gleiche Sprache wie \mathcal{A}_3 akzeptiert.
 (c) Zeigen Sie, dass es keinen zu \mathcal{A}_n äquivalenten DFA gibt mit weniger als 2^n Zuständen.

Musterlösung:

- (a) $L(\mathcal{A}_n)$ is die Menge von a/b -Folgen, an deren n -ter Position vor dem Ende ein b steht.

(b) Wir verwenden den Potenzmengentrick um \mathcal{A}_3 zu determinisieren:

δ	a	b
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$
$\{0, 1\}$	$\{0, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$\{0, 2\}$	$\{0, 3\}$	$\{0, 1, 3\}$
$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$
$\{0, 3\}$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$
$\{0, 1, 3\}$	$\{0, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$\{0, 2, 3\}$	$\{0, 3\}$	$\{0, 1, 3\}$
$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{0, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$

Die Zustände sind $\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$. Akzeptierend sind $\{0, 3\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$.

(c) Nehmen wir an, \mathcal{Q} ist ein äquivalenter DFA mit weniger als 2^n Zuständen. Dann gäbe es einen Zustand q und zwei verschiedene Zeichenreihen $x_1x_2\dots x_n$ und $y_1y_2\dots y_n$, sodass sich \mathcal{Q} nach dem Einlesen sowohl von $x_1x_2\dots x_n$ als auch von $y_1y_2\dots y_n$ im Zustand q befände. (Dies folgt aus dem *Schubfachprinzip*, d.h. aus der Tatsache, dass falls $n+1$ Objekte in n Schubfächer eingeordnet werden, es ein Schubfach gibt, in dem sich mindestens zwei Objekte befinden.)

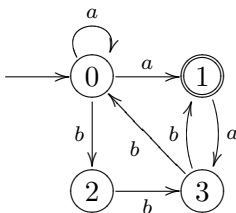
Da die Zeichenreihen verschieden sind, müssen sie sich an einer bestimmten Position unterscheiden; sei $x_i \neq y_i$. Angenommen (auf Grund der Symmetrie ohne Beschränkung der Allgemeinheit), $x_i = b$ und $y_i = a$. Wenn $i = 1$, dann muss q sowohl ein akzeptierender Zustand als auch ein nicht akzeptierender Zustand sein, da $x_1x_2\dots x_n$ akzeptiert wird (das n -te Zeichen vor dem Ende ist b) und $y_1y_2\dots y_n$ nicht. Ist $i > 1$, dann betrachten wir den Zustand p , in den \mathcal{Q} nach dem Einlesen sowohl von $x_1x_2\dots x_n a^{i-1}$ als auch von $y_1y_2\dots y_n a^{i-1}$ käme. Da $x_i = b$ und $y_i = a$, müsste $x_1x_2\dots x_n a^{i-1}$ akzeptiert werden (das n -te Zeichen vor dem Ende ist $x_i = b$) und $y_1y_2\dots y_n a^{i-1}$ nicht, d.h. p müsste ein akzeptierender und zugleich ein nicht akzeptierender Zustand sein. Dies ist ein Widerspruch, somit können wir folgern, dass unsere Annahme falsch ist, d.h. es gibt keinen DFA mit weniger als 2^n Zuständen.

Hausübung

Aufgabe H1

(6 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden NFA \mathcal{A} :



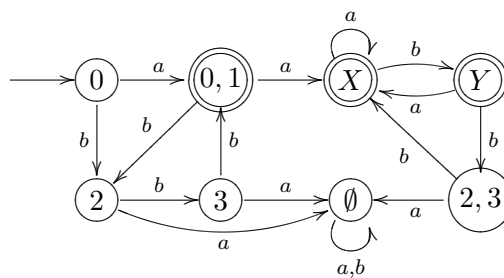
- Bestimmen Sie einen zu \mathcal{A} äquivalenten DFA.
- Finden Sie einen regulären Ausdruck für $L(\mathcal{A})$. Betrachten Sie dafür den DFA und finden Sie zuerst für jeden Endzustand einen regulären Ausdruck, der alle Läufe von diesem Endzustand zu demselben Endzustand zurück beschreibt.

Musterlösung:

(a) Wir verwenden den Potenzmengentrick um \mathcal{A} zu determinisieren:

δ	a	b
$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{2\}$
$\{0, 1\}$	$\{0, 1, 3\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	\emptyset	$\{3\}$
$\{0, 1, 3\}$	$\{0, 1, 3\}$	$\{0, 1, 2\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{3\}$	\emptyset	$\{0, 1\}$
$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	\emptyset	$\{0, 1, 3\}$

Akzeptierende Zustände sind $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 3\}$ und $\{0, 1, 2\}$. In einem Bild (mit $X = \{0, 1, 3\}$ und $Y = \{0, 1, 2\}$):



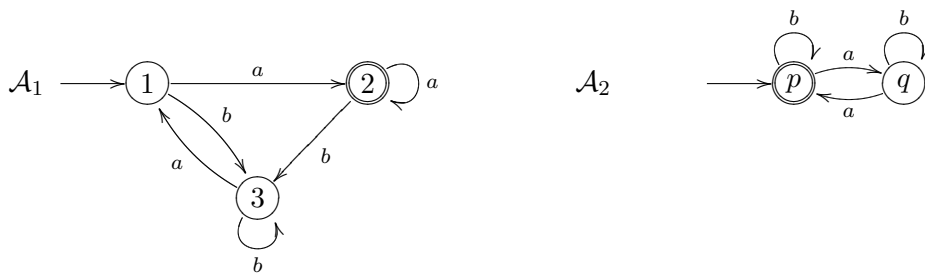
(b) Die Schleifen des Zustands $\{0, 1\}$ werden durch $(bbb)^*$ beschrieben. Schleifen von X werden durch $(a + ba + bbb)^*$ beschrieben. $(bba^*b + aa^*b)^*$ beschreibt die Schleifen von Y . Damit ergibt sich als regulärer Ausdruck für die von \mathcal{A} erkannte Sprache

$$(a + bbb)(bbb)^*(\emptyset^* + a(a + ba + bbb)^* + aa^*b(bba^*b + aa^*b)^*).$$

Aufgabe H2

(6 Punkte)

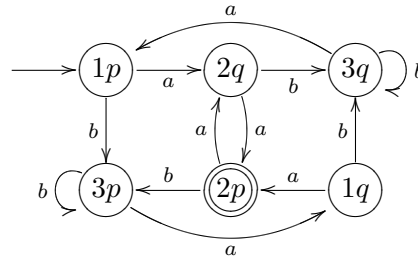
Gegeben seien die folgenden DFA:



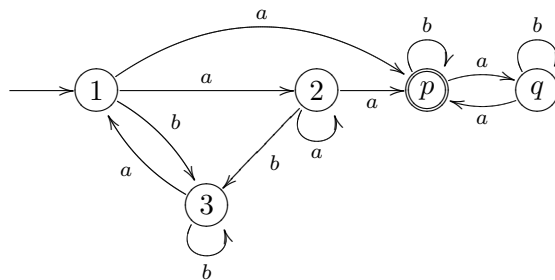
- (a) Geben Sie einen DFA an, der $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$ erkennt.
- (b) Geben Sie einen NFA an, der $L(\mathcal{A}_1) \cdot L(\mathcal{A}_2)$ erkennt. Was ändert sich an der Lösung, wenn der Zustand 1 in \mathcal{A}_1 auch akzeptierend ist?
- (c) Geben Sie einen NFA an, der $\text{rev}(L(\mathcal{A}_1))$ erkennt. Die Sprache $\text{rev}(L)$ enthält die Wörter aus L rückwärts gelesen, d.h., wenn $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n \in L$, dann ist $x_nx_{n-1} \dots x_2x_1 \in \text{rev}(L)$.

Musterlösung:

(a) Wir bilden den Produktautomaten (vgl. Lemma 2.2.11 auf Seite 30 im Skript):



(b) Wir benutzen die Konstruktion aus Lemma 2.2.14(a) auf Seite 31 im Skript:



Falls Zustand 1 in \mathcal{A}_1 auch akzeptierend ist, muss in diesem Automaten der Zustand 1 auch akzeptierend sein und es muss eine a -Transition von 1 nach q sowie eine b -Transition von 1 nach p und eine a -Transition von 3 nach p hinzugefügt werden (warum?).

(c) Wir drehen alle Transitionen um und vertauschen den Anfangszustand und den akzeptierenden Zustand (der in diesem Fall eindeutig ist). Als Ergebnis bekommen wir den folgenden NFA mit 2 als Anfangszustand und 1 als akzeptierendem Zustand:

