Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
14.04.2010

# 1. Übungsblatt zu FGdI 1

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**

Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 5 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5$ bezeichnen und die anfangs in der Ordnung 35241 auf dem Stapel liegen, entspricht das Umdrehen der ersten (obersten) 3 dem Übergang

$$35241 \xrightarrow{3} 25341 \,.$$

(a) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.

(b) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit $k$ Operationen sortieren lassen, aber nicht mit weniger. Welcher Stapel ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

(c)* Skizzieren Sie einen Algorithmus, der jeden $n$-Stapel in höchstens $2n$ Schritten sortiert.[1]

**Aufgabe G2**

Sei $M$ eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

$$\text{(i) } (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B, \qquad \text{(ii) } C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

**Aufgabe G3**

Wir stellen einen gerichteten Graphen als ein Tupel $(V, E)$ dar, wobei $V$ die Knotenmenge und $E \subseteq V \times V$ die Kantenrelation ist. $(x, y) \in E$ soll genau dann zutreffen, wenn es eine Kante von $x$ nach $y$ gibt; wir schreiben auch $x \longrightarrow y$ um diesen Sachverhalt auszudrücken.

(a) Sei $R_0 \subseteq V \times V$ die Menge aller Paare $(p, q)$, so dass es eine Folge von Kanten $p \longrightarrow \ldots \longrightarrow q$ von $p$ nach $q$ gibt (die Folge kann die Länge 0 haben; insbesondere erlauben wir $p = q$). Sei ferner $S_0 := \{(p, q) : (p, q) \in R_0 \text{ und } (q, p) \in R_0\}$.
Beweisen Sie, dass $R_0$ transitiv und $S_0$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $R_1 := \{(p, q) : (p, q) \in E \text{ oder } (q, p) \in E\}$ und $S_1$ die Menge aller Paare $(p, q)$, so dass es eine Folge $\langle p_0, \ldots, p_n \rangle$ gibt, mit $p = p_0, q = p_n$ und $(p_i, p_{i+1}) \in R_1$ für alle $i < n$.
Zeigen Sie, dass $R_1$ symmetrisch und $S_1$ eine Äquivalenzrelation ist.

[1] Beweise, dass sich jeder Stapel auf diese Art sortieren lässt, und Schranken, wieviele Operationen dazu höchstens benötigt werden, finden sich in William H. Gates und Christos H. Papadimitriou, *Bounds for sorting by prefix reversal,* Discrete Mathematics 27:47–57 (1979).

(c) Sei jetzt $R_2 := \{(p,q) : (p,q) \in E \text{ und } (q,p) \in E\}$ und $S_2$ definiert wie $S_1$ in (b), wobei nun aber für alle $i < n$ gelten soll, dass $(p_i, p_{i+1}) \in R_2$.

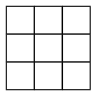
Zeigen Sie, dass $R_2$ symmetrisch und $S_2$ eine Äquivalenzrelation ist.

(d) Welche Beziehungen gibt es zwischen $S_1, S_2$ und $S_3$? (Machen Sie sich dazu klar, was die intuitive Bedeutung dieser Relationen ist.) Finden Sie auch einen Graphen in dem alle drei Relationen unterschiedliche Bedeutungen haben.

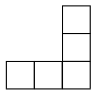
# Hausübung

**Aufgabe H1** (6 Punkte)

Betrachten Sie dass folgende Spiel. Das Spiel beginnt mit einer rechteckigen Tafel Schokolade, z.B. von folgender Form:

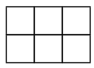


Zwei Spieler wählen nun abwechselnd ein Stück der Schokolade. Wer ein Stück gewählt hat, muss dieses Stück essen, sowie alle anderen Stücke, die sich weiter links, oberhalb oder weiter links und oberhalb von dem gewählten Stück befinden. Der Spieler darf keine anderen Stücke essen. Wenn man beispielsweise das mittlere Stück der oben abgebildeten Schokolade aussucht, bleibt folgender Rest übrig:



Jeder Spieler muss immer mindestens ein Stück Schokolade essen und wer das letzte Stück isst, hat verloren.

(a) Nehmen Sie an, das Spiel beginnt mit der folgenden Form:



Zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm, dessen Knoten die möglichen Positionen sind, die man von der Startposition aus erreichen kann. Die Kanten sollen die möglichen Übergänge darstellen, die einem Zug im Spiel entsprechen.

(b) Erklären Sie, wie man das Diagramm benutzen kann um die Positionen zu ermitteln, in denen der Spieler, der am Zug ist, Gewinn erzwingen kann (also eine *Gewinnstrategie* hat).

(c) Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie sieht seine Strategie aus?

**Aufgabe H2** (6 Punkte)

Sei $M$ eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

**Aufgabe H3** (6 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Wir sagen „$f$ ist in $\mathcal{O}(g)$" (kurz „$f \in \mathcal{O}(g)$"), falls es Konstanten $K, n_0$ gibt, so dass

$$f(n) \leq K \cdot g(n) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wir schreiben $f \sim g$, falls $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$. $f \sim g$ besagt, dass $f$ und $g$ dieselbe Wachstumsrate haben.

Zeigen Sie, dass $f \sim g$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist.