Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Otto
Alexander Kartzow
Alexander Kreuzer
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
14.04.2010

1. Übungsblatt zu FGdI 1

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 5 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5$ bezeichnen und die anfangs in der Ordnung 35241 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 3 dem Übergang

$$35241 \xrightarrow{3} 25341$$

entsprechen.

(a) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.

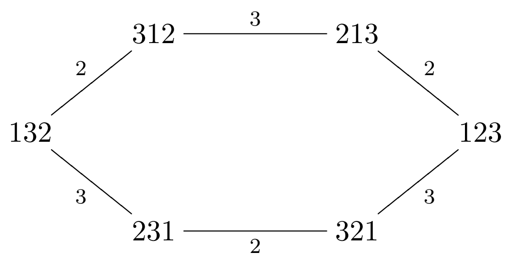
(b) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welches ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

(c)* Skizzieren Sie einen Algorithmus, welcher jeden n-Stapel in höchstens $2n$ Schritten sortiert. Beweise, dass sich jeder Stapel auf diese Art sortieren lässt, und Schranken, wieviele Operationen dazu höchstens benötigt werden, finden sich in

William H. Gates und Christos H. Papadimitriou, *Bounds for sorting by prefix reversal,* Discrete Mathematics 27:47–57 (1979).

Musterlösung:

(a)



(b)

0 :	1234
1 :	$2134, 3214, 4321$
2 :	$3124, 4312, 2314, 4123, 3421, 2341$
3 :	$1324, 4213, 3412, 1342, 4132, 1423, 2143, 2431, 1243, 3241, 1432$
4 :	$4231, 2413, 3142$

$$1324 \xrightarrow{2} 3124 \xrightarrow{3} 2134 \xrightarrow{2} 1234$$

$$1324 \xrightarrow{3} 2314 \xrightarrow{2} 3214 \xrightarrow{3} 1234$$

(c) Wir sortieren den Stapel von unten. Wenn die letzten l Pfannkuchen schon richtig liegen können wir den nächsten Pfannkuchen in zwei Schritten an die richtige Position bringen: Liegt dieser an Position k, so bringen wir ihn zuerst nach oben, indem wir die ersten k Pfannkuchen wenden, und danach bringen wir ihn durch Wenden der ersten $n-l$ Pfannkuchen an seinen richtigen Platz. Indem wir diese beiden Schritte n mal wiederholen, können wir jeden Stapel sortieren.

Aufgabe G2

Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.

(ii) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

Musterlösung:

(a) (i) Wir zeigen, dass $(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap B$ und $(A \cap B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cap B$.

($\subseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \setminus C$. Dann ist $x \in A$, $x \in B$ und $x \notin C$. Also haben wir $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Daraus folgt, dass $x \in (A \setminus C) \cap B$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \setminus C) \cap B$. Dann ist $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Das erste bedeutet, dass $x \in A$ und $x \notin C$. Da $x \in A$ und $x \in B$, haben wir $x \in A \cap B$. Da auch $x \notin C$, folgt $x \in (A \cap B) \setminus C$.

(ii) Wir zeigen, dass $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ und $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \supseteq C \setminus (A \cap B)$.

($\subseteq$) Sei $x \in C \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in C$ und $x \notin A \cap B$. Da $x \notin A \cap B$, muss $x \notin A$ gelten oder $x \notin B$ (wäre beides falsch, dann gilt $x \in A$ und $x \in B$ und damit $x \in A \cap B$). Falls $x \notin A$ gilt, dann $x \in C \setminus A$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Falls $x \notin B$ gilt, dann $x \in C \setminus B$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. In beiden Fällen gilt also $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Dann gilt $x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$. Im ersten Fall gilt $x \in C$ und $x \notin A$. Letzteres impliziert, dass $x \notin A \cap B$. Also gilt $x \in C \setminus (A \cap B)$. Im zweiten Fall beweist man analog, dass $x \in C \setminus (A \cap B)$.

(b) Es gilt, dass $A \cap (M \setminus B) \subseteq A \setminus (B \cap C)$, $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Weiterhin sind sowohl $M \setminus (A \cup B)$ und $A \setminus (B \cap C)$ als auch $M \setminus (A \cup B)$ und $A \cap (M \setminus B)$ disjunkt.

Aufgabe G3

Wir stellen einen gerichteten Graphen als ein Tupel (V, E) dar, wobei V die Knotenmenge und $E \subseteq V \times V$ die Kantenrelation ist. $(x, y) \in E$ soll genau dann zutreffen, wenn es eine Kante von x nach y gibt; wir schreiben auch $x \longrightarrow y$ um diesen Sachverhalt auszudrücken.

(a) Sei $R_0 \subseteq V \times V$ die Menge aller Paare (p, q), so dass es eine Folge von Kanten $p \longrightarrow \ldots \longrightarrow q$ von p nach q gibt (die Folge kann die Länge 0 haben; insbesondere erlauben wir $p = q$). Sei ferner $S_0 := \{(p, q) : (p, q) \in R_0 \text{ und } (q, p) \in R_0\}$.

Beweisen Sie, dass R_0 transitiv und S_0 eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $R_1 := \{(p, q) : (p, q) \in E$ oder $(q, p) \in E\}$ und S_1 die Menge aller Paare (p, q), so dass es eine Folge $\langle p_0, \dots, p_n \rangle$ gibt, mit $p = p_0, q = p_n$ und $(p_i, p_{i+1}) \in R_1$ für alle $i < n$.

Zeigen Sie, dass R_1 symmetrisch und S_1 eine Äquivalenzrelation ist.

(c) Sei jetzt $R_2 := \{(p, q) : (p, q) \in E$ und $(q, p) \in E\}$ und S_2 definiert wie S_1 in (b), wobei nun aber für alle $i < n$ gelten soll, dass $(p_i, p_{i+1}) \in R_2$.

Zeigen Sie, dass R_2 symmetrisch und S_2 eine Äquivalenzrelation ist.

(d) Welche Beziehungen gibt es zwischen S_0, S_1 und S_2? (Machen Sie sich dazu klar, was die intuitive Bedeutung dieser Relationen ist.) Finden Sie auch einen Graphen in dem alle drei Relationen unterschiedliche Bedeutungen haben.

Musterlösung:

(a) Angenommen, dass $(p, q) \in R_0$ und $(q, r) \in R_0$. Dann gibt es Pfade $p \to \cdots \to q$ und $q \to \cdots \to r$. Wenn wir diese aneinanderhängen, erhalten wir einen Pfad $p \to \cdots \to r$. Also ist $(p, r) \in R_0$. Also ist R_0 transitiv.

Wir beweisen jetzt, dass S_0 eine Äquivalenzrelation ist:
(Reflexivität) Da $(p, p) \in R_0$ für alle $p \in Q$, gilt $(p, p) \in S_0$.

(Symmetrie) Sei $(p, q) \in S_0$. Dann ist $(p, q) \in R_0$ und $(q, p) \in R_0$. Nach Definition von S_0 folgt, dass $(q, p) \in S_0$.

(Transitivität) Sei $(p, q) \in S_0$ und $(q, r) \in S_0$. Dann ist $(p, q), (q, p), (q, r), (r, q) \in R_0$. Da R_0 transitiv ist, folgt, dass $(p, r), (r, p) \in R_0$. Also ist auch $(p, r) \in S_0$.

(b) Falls $(p, q) \in R_1$, dann $(p, q) \in E$ oder $(q, p) \in E$. Im beiden Fällen gilt $(q, p) \in R_1$, also ist R_1 symmetrisch.

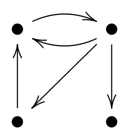
Wir beweisen jetzt, dass S_1 eine Äquivalenzrelation ist:
(Reflexivität) $(p, p) \in S_1$, da $\langle p \rangle$ eine geeignete Folge ist.

(Symmetrie) Sei $(p, q) \in S_1$. Dann gibt es eine Folge $\langle p_0, \dots, p_n \rangle$ mit $p = p_0, q = p_n$ und $(p_i, p_{i+1}) \in R_1$ für alle $i < n$. Da R_1 symmetrisch ist, gilt auch $(p_{i+1}, p_i) \in R_1$ für alle $i < n$. Also ist $\langle p_n, \dots, p_0 \rangle$ eine Folge, die belegt, dass $(q, p) \in S_1$.

(Transitivität) zeigt man wieder durch aneinanderhängen von Folgen.

(c) Analog zu (a) und (b).

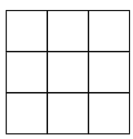
(d) Es gilt $S_2 \subseteq S_0 \subseteq S_1$. Alle Inklusionen sind echt, was sich z.B. am folgenden Graphen zeigt:



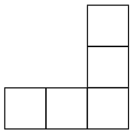
Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Betrachten Sie dass folgende Spiel. Das Spiel beginnt mit einer rechteckigen Tafel Schokolade, z.B. von folgender Form:



Zwei Spieler wählen nun abwechselnd ein Stück der Schokolade. Wer ein Stück gewählt hat, muss dieses Stück essen, sowie alle anderen Stücke, die sich weiter links, oberhalb oder weiter links und oberhalb von dem gewählten Stück befinden. Der Spieler darf keine anderen Stücke essen. Wenn man beispielsweise das mittlere Stück der oben abgebildeten Schokolade aussucht, bleibt folgender Rest übrig:



Jeder Spieler muss immer mindestens ein Stück Schokolade essen und wer das letzte Stück isst, hat verloren.

(a) Nehmen Sie an, das Spiel beginnt mit der folgenden Form:

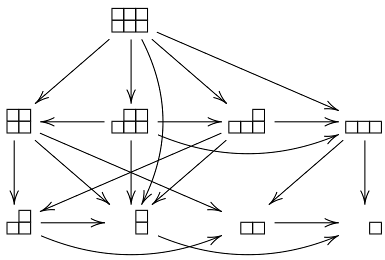
Zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm, dessen Knoten die möglichen Positionen sind, die man von der Startposition aus erreichen kann. Die Kanten sollen die möglichen Übergänge darstellen, die einem Zug im Spiel entsprechen.

(b) Erklären Sie, wie man das Diagramm benutzen kann um die Positionen zu ermitteln, in denen der Spieler, der am Zug ist, Gewinn erzwingen kann (also eine *Gewinnstrategie* hat).

(c) Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie sieht seine Strategie aus?

Musterlösung:

(a)



Dazu gibt gibt es auch noch die leere Position $\emptyset$, die man aus jeder anderen Position erreichen kann.

(b) Nennen wir eine Position, in der der Spieler, der in dieser Position am Zug ist, eine Gewinnstrategie hat eine *Gewinnposition* und eine Positione, in der der Spieler, der nicht am Zug ist, eine Gewinnstrategie hat eine *Verlustposition.*

Die beide Klassen der Positionen lassen sich induktiv aus dem Diagramm ermitteln, da eine Position eine Gewinnposition ist, genau dann wenn es in dieser Position einen Zug gibt, der zu einer Verlustposition führt und eine Position eine Verlustposition ist, genau dann wenn alle mögliche Züge zu einer Gewinnposition führen. Dabei betrachten wir $\emptyset$ als eine Gewinnposition, da in dieser Position der Gegner soeben das letzte Stück gegessen haben muss.

So sieht man erstens ein, dass eine Verlustposition ist, da der einzig mögliche Zug in dieser Position daraus besteht das letzte Stück Schokolade zu essen. Damit sind dann alle Positionen, von denen es ein Übergang zu gibt, Gewinnpositionen, d.h. , , . Nun kann die Menge der Verlustpositionen mit erweitert werden, da alle mögliche Züge in dieser Position zu einer Gewinnposition führen. Fährt man so fort, dann ergibt sich, dass , , Verlustpositionen sind und der Rest Gewinnpositionen.

(c) Der erste Spieler gewinnt, da  Gewinnpositionen ist. Die einzige Möglichkeit mit dem ersten Zug in eine Verlustposition für Spieler 2 zu kommen, besteht darin, die linke obere Ecke zu essen. In seinem zweiten Zug muss Spieler 1 entweder die Position  oder die Position $\square$ erreichen. Eines von beidem ist immer möglich. Falls Spieler 1 noch einen dritten Zug machen muss, kann er immer die Position $\square$ erreichen.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

Musterlösung:

(a) ($\subseteq$) Wenn $x \in A \cup (B \cap C)$, dann gilt $x \in A$ oder $x \in B \cap C$. Falls $x \in A$, dann gilt auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Wenn $x \in B \cap C$, ist $x \in B$ und $x \in C$, also wiederum $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Also ist auch $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann ist $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Aus $x \notin A$ würde dann folgen, dass $x \in B$ und $x \in C$. Damit ist $x \in A$ oder $x \in B \cap C$, was genau die Definition von $x \in A \cup (B \cap C)$ ist.

(b) ($\subseteq$) Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Also ist $x \in B$ oder $x \in C$. Damit ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Somit ist $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Also ist $x \in A$ und $x \in B$ oder $x \in A$ und $x \in C$. Damit ist in jedem Fall $x \in A$ und $x \in B$ oder $x \in C$, also $x \in B \cup C$. Damit ist aber auch $x \in A \cap (B \cup C)$.

(c) ($\subseteq$) Sei $x \in M \setminus (A \cup B)$. Dann ist $x \in M$ und $x \notin A \cup B$. Also ist $x \notin A$ und $x \notin B$. Dann ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Damit ist aber auch $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Dann ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Also ist $x \in M$ und $x \notin A$ und $x \notin B$. Damit ist $x \notin A \cup B$, also $x \in M \setminus (A \cup B)$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Wir sagen „f ist in $\mathcal{O}(g)$" (kurz „$f \in \mathcal{O}(g)$"), falls es Konstanten K, n_0 gibt, so dass

$$f(n) \leq K \cdot g(n) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Wir schreiben $f \sim g$, falls $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$. $f \sim g$ besagt, dass f und g dieselbe Wachstumsrate haben.

Zeigen Sie, dass $f \sim g$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist.

Musterlösung:

Wir bemerken zuerst, dass $f \in \mathcal{O}(f)$, weil wir einfach $K = 1$ und $n_0 = 0$ wählen können.

Weiter gilt, dass

$$f \in \mathcal{O}(g) \text{ und } g \in \mathcal{O}(h) \text{ impliziert } f \in \mathcal{O}(h). \tag{1}$$

Nehmen wir an, dass $f(n) \leq K_0 \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ und $g(n) \leq K_1 h(n)$ für alle $n \geq n_1$. Dann folgt, dass $f(n) \leq K_0 K_1 h(n)$ wenn $n \geq n_0$ und $n \geq n_1$, d.h., wenn $n \geq \max(n_0, n_1)$.

Jetzt beweisen wir, dass $f \sim g$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflexivität $f \sim f$ ist klar, da $f \in \mathcal{O}(f)$; die Symmetrie is auch klar, weil $f \sim g$ heißt, dass $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$, woraus folgt, dass $g \sim f$.

Um die Transitivität zu beweisen, nehmen wir an, dass $f \sim g$ und $g \sim h$. Daraus folgt, dass $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h)$. Dann folgt mit (1), dass $f \in \mathcal{O}(h)$. Analog beweist man $h \in \mathcal{O}(f)$.