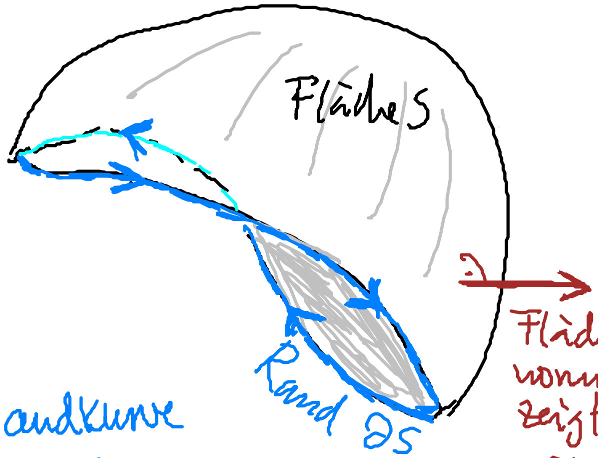
Gestern: Integralsätze, insb. <u>Satz von Stokes</u>

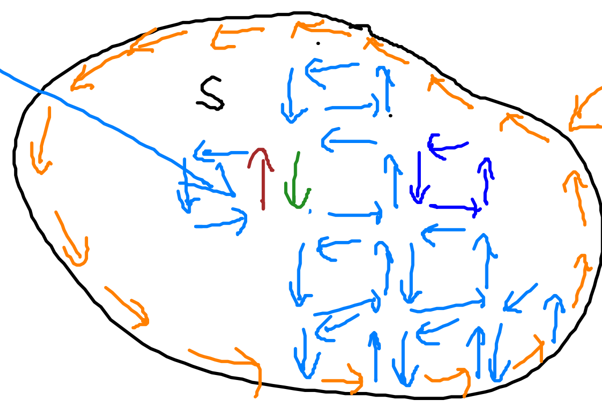


$$\boxed{\iint_S \operatorname{rot} v \, dO = \oint_{\partial S} v \cdot dx}$$

Randkurve so parametrisiert, dass Fläche „links" liegt, wenn man in Richtung Flächennormale schaut.

Flächennormale zeigt nach „außen"

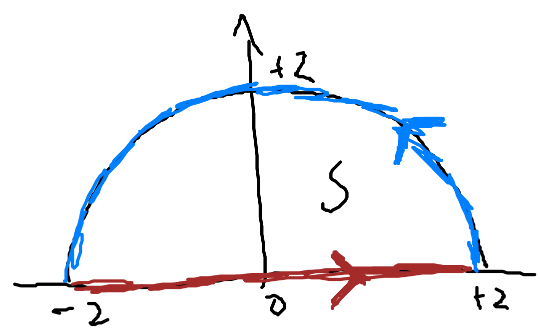
Versuch einer Interpretation:



<u>Beispiel</u>

gegeben: Vektorfeld

$$v = \begin{pmatrix} -x^2 + z \\ xy \\ y + (x+1)z \end{pmatrix}$$



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0 \right\}$$

$\partial S = K_1 \cup K_2$

$K_1: g_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2$

$K_2: g_2(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

Bestimme: $\displaystyle\oint_{\partial S} v \cdot dx$

a) direkt:

$$\oint_{\partial S} v \cdot dx = \int_{K_1} v \cdot dx + \int_{K_2} v \cdot dx$$

laut unseren Formeln

$$= \int_{-2}^{2} v(g_1(t)) \cdot g_1'(t)\, dt + \int_0^{\pi} v(g_2(t)) \cdot g_2'(t)\, dt$$

rote Kurve eingesetzt in v

blaue Kurve eingesetzt in v

$$= \int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} -t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -4\cos^2 t \\ 4\cos t \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-2}^{2} -t^2\, dt + \int_0^{\pi} 16\cos^2 t \sin t\, dt$$

$$= \left[\frac{-t^3}{3}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{16}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} = \frac{16}{3}$$

(b) alternativ mit Satz von Stokes:

$$\iint_S \underbrace{\operatorname{rot} v}_{\text{brauche Formel für rot } v} \cdot \underbrace{dO}_{\text{benötigt: Parametrisierung der Fläche } S} = \iint_S \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-z \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dx\,dy$$

Parametrisierung der Fläche S

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \iint_S \begin{pmatrix} 1 \\ 1-z \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy = \iint_S y \, dx\,dy$$

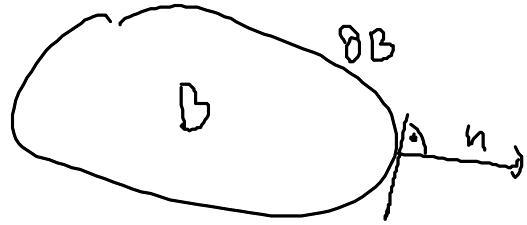
Übergang zu Polarkoord. um dieses Integral zu berechnen

$$= \int_0^2 \int_0^\pi \underbrace{r \sin\varphi}_{y \text{ in Polarkoord.}} \cdot \underbrace{r \, d\varphi \, dr}_{\text{lt. Transformationsformel}}$$

$$= \int_0^2 \left[-r^2 \cos\varphi \right]_0^\pi dr = \ldots = \frac{16}{3}$$

//

Integralsatz von Gauß



$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$

$$\boxed{\iint_B \operatorname{div} v \, dx\, dy = \oint_{\partial B} v \cdot n \cdot ds}$$

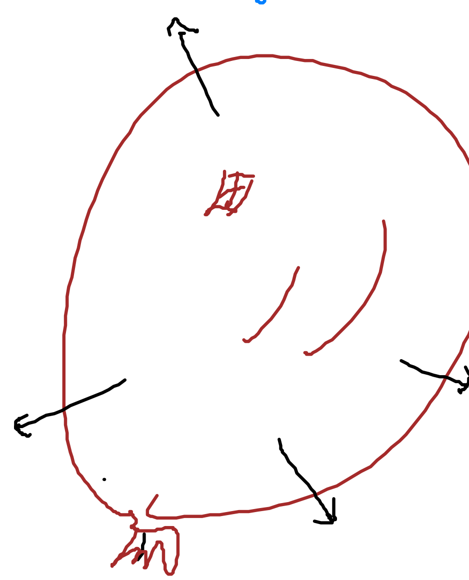
Quellstärke im Inneren von B, also um wieviel wird der Fluss „mehr"?

misst, wieviel Fluss über den Rand nach draußen geht.

Im Dreidimensionalen:

Satz von Gauß

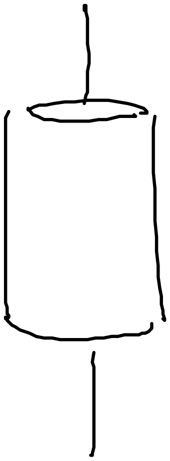
$$\boxed{\iiint_B \operatorname{div} v \, dV = \oint\!\!\!\oint_{\partial B} v \cdot n \cdot dO}$$



Beispiel

gegeben Vektorfeld: $v = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} \\ (x+y)z \\ y^2 z \end{pmatrix}$

Die Fläche ist Zylindermantel



$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underbrace{x^2+y^2=2^2}_{\text{Radius}=2}, x,y \geq 0, \; 0 \leq z \leq 10 \right\},$$

Der Fluss durch den Zylindermantel kann laut Satz v. Gauß berechnet werden als

$$\oiint_{\partial B} v \cdot dO = \iiint_B \operatorname{div} v \, dV = \iiint_B (x^2+z+y^2)\, \overset{dx\,dy\,dz}{\overset{\shortparallel}{dV}}$$

Übergang zu Zylind. koord.

$$= \int_0^{10}\int_0^{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(r^2\cos^2\varphi + z + r^2\sin^2\varphi\right)}_{r^2+z} r \, d\varphi \, dr \, dz$$

$$= \int_0^{10}\int_0^{2} \Big[(r^3+zr)\varphi\Big]_0^{2\pi} dr\, dz = \ldots = \ldots = 140\pi$$

Feriensprechstunden: LZM, Assis + Doz ebenfalls (am besten per Email ankündigen)

<u>Ein paar</u> Begriffe + Konzepte + Fragen aus Mathe II

<u>Kap. 6 Lineare Algebra</u>

- Begriff Vektorraum, Unterraum
- Linearkombination, lineare Hülle, Erzeugendensystem
- linear abhängig, linear unabhängig

- Basis, Dimension, Standardbasis
- LGS, homogen, inhomogen, Koeffizientenmatrix, erweiterte Koeff.matrix
- Lösbarkeit von LGS (eindeutig, ∞ viele, nicht) → verschiedene Kriterien
- Matrizen, rechnen damit
- Gauß-Algorithmus
- Rang einer Matrix, was kann ich da ablesen?
- Bestimmen aller Lösungen eines LGS (spezielle Lsg + allg. Lsg)
- Bestimmen einer Basis + Dimension
- Matrixmultiplikation (auch: $\hat{=}$ Verkettung lin. Abb.)
- Matrix als Darstellung bzgl. einer Basis einer lin.-Abb.
- A^T, symmetrisch, A^{-1}, Bestimmung d. Inversen
- wann A invertierbar → mehrere Kriterien
- Basiswechsel, Transformationsmatrix

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}\ V \arrow[r, "\varphi", "A"'] & W\ \mathcal{B} \\ \mathcal{B}'\ V \arrow[u, "S"] \arrow[r, "\varphi", "A'"'] & W\ \mathcal{B}' \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

- Diagonalmatrix
- Determinanten, was kann ich damit machen?

  Berechnung? → Gauß, direkt/Sarrus, Entwicklung,

- Cramer Regel
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume, char. Polynom
  - algebraische/geometrische Vielfachheit
- Diagonalisierbarkeit, Basis aus Eigenvektor
- Orthogonalbasis / Gram-Schmidt-Verfahren / orthog. Matrizen

- was sagen dann Eigenwerte etc. über die Abb.?
- quadratische Formen, Hauptachsentransformation
- Transformation einer Quadrik auf Normalform, Typerkennung.

Kap. 7

- Darstellung von Mengen, Rand, offen, abgeschlossen
- Stetigkeit höherdim. Funktionen
- Niveaulinien
- partielle Ableitung, Gradient, Bedeutung des Gradients
- Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit der partiellen Abl.)
- Totale Ableitung (= lineare Approximation)
- Tangentialebene (ngleichung aufstellen)
- Näherungsrechnung damit
- Newtonverfahren
- Richtungsableitung, Abstieg, partielle Abl. sind spezielle Richtungsableitungen

- Gradientenverfahren
- Taylorformel (bis 2. Ordnung aufstellen können)
- Hessematrix
- Lokale Minima, Maxima, stationäre Punkte, Sattelpunkte, Extremwerttest über Definitheit der Hessematrix
- Extremwerte unter Nebenbedingungen (verschiedene Methoden)
- Vektorwertige Abbildungen, Funktionalmatrix (= Jacobimatrix)
- Rotation, Divergenz

Kap 8.

- Doppelintegrale, Flächenberechnung in der Ebene, Normalbereiche!
- Dreifachintegrale
- Transformation in andere Koordinaten, Kartesisch → Polar-, Kugel-, Zylinder-
- Kurvenintegrale, Länge von Kurven, Bogenelement
- Parametrisierung von Kurven
- Wann heißt ein Vektorfeld konservativ (Potentialfeld)?
- Was ist eine Stammfunktion eines Vektorfeldes? gibt es immer eine? Wie berechnet man sie?
- Oberflächenintegrale, vektorielles Flächenelement,
- Parametrisieren einer Fläche
- Normalenvektor bestimmen können
- Fläche eines Funktionsgraphen ausrechnen können
- Integralsätze von Green, Stokes, Gauß

$\boxed{\text{VIEL ERFOLG!}}$