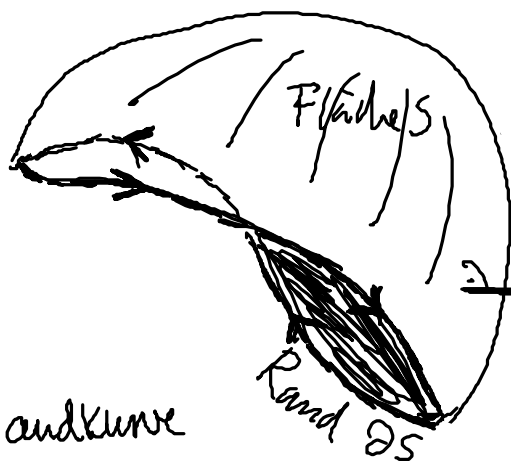


Gestern: Integralsätze, insb. Satz von Stokes

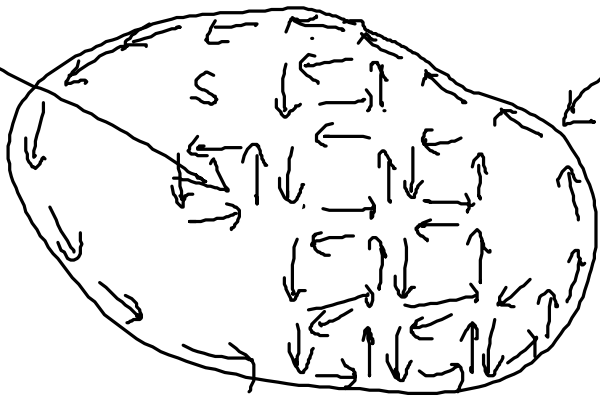


$$\iint_S \text{rot } v \, dO = \int_{\partial S} v \cdot dx$$

Flächen-
normale
zeigt nach
„außen“

Randkurve
so parametrisiert, dass
Fläche „links“ liegt,
wenn man in Richtung
Flächennormale schaut.

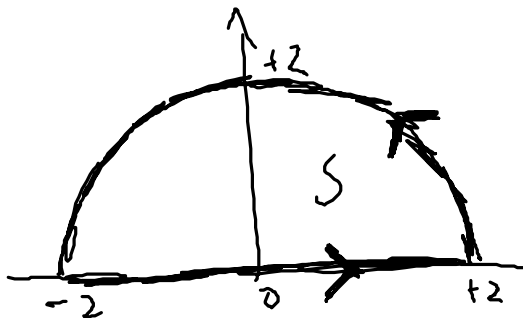
Versuch einer Interpretation:



Beispiel

gegeben: Vektorfeld

$$v = \begin{pmatrix} -x^2 + z \\ xy \\ y + (x+1)z \end{pmatrix}$$



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0 \right\}$$

$$\partial S = K_1 \cup K_2$$

$$K_1: g_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -2 \leq t \leq 2$$

$$K_2: g_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi$$

Bestimme: $\oint_{\partial S} v \cdot dx$

a) direkt:

$$\oint_{\partial S} v \cdot dx = \int_{K_1} v \cdot dx + \int_{K_2} v \cdot dx$$

laut unserer
Formeln

$$= \int_{-2}^2 v(g_1(t)) \cdot g_1'(t) dt + \int_0^{\pi} v(g_2(t)) \cdot g_2'(t) dt$$

rote Kurve eingesetzt in v blaue Kurve eingesetzt in v

$$= \int_{-2}^2 \begin{pmatrix} -t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -4 \cos^2 t \\ 4 \cos t \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-2}^2 -t^2 dt + \int_0^{\pi} 16 \cos^2 t \sin t dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^2 - \left[\frac{16}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} = \frac{16}{3}$$

(b) alternativ mit Satz von Stokes:

$$\iint_S \underbrace{\operatorname{rot} v}_{\substack{\text{brauche} \\ \text{Formel für} \\ \operatorname{rot} v}} \cdot \underbrace{d\vec{O}}_{\substack{\text{benötigt:} \\ \text{Parametrisierung} \\ \text{der Fläche } S}} = \iint_S \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-z \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dx dy$$

brauche
Formel für
 $\operatorname{rot} v$

benötigt:
Parametrisierung
der Fläche S

Parametrisierung der Fläche S
 $g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$
 $g_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $g_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

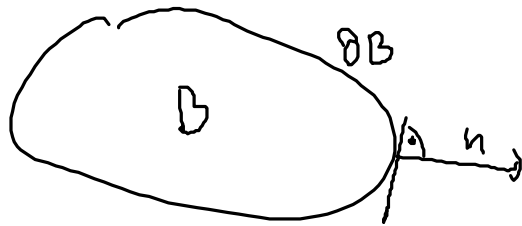
$$= \iint_S \begin{pmatrix} 1 \\ 1-z \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \iint_S y dx dy$$

Übergang zu Polarkoord. um dieses Integral zu berechnen

$$= \int_0^2 \int_0^\pi \underbrace{r \sin \varphi}_{\substack{\uparrow \\ y \text{ in} \\ \text{Polarkoord.}}} \cdot \underbrace{r dr d\varphi}_{\text{lt. Transformationsformel}}$$

$$= \int_0^2 [r^2 \cos \varphi]_0^\pi dr = \dots = \frac{16}{3}$$

Integralsatz von Gauß



$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{div } v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\boxed{\iint_B \text{div } v \, dx \, dy = \int_{\partial B} v \cdot n \, ds}$$

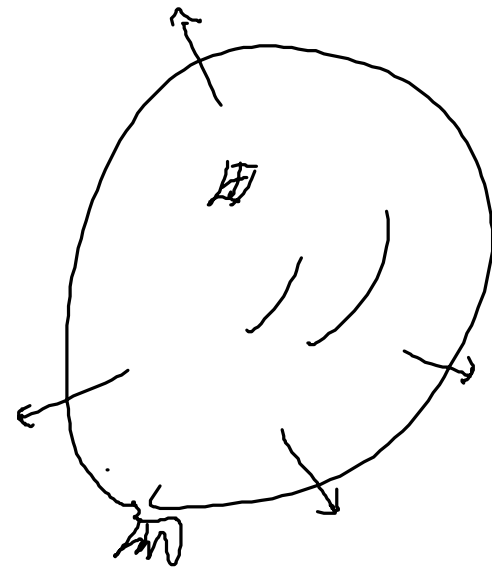
Quellstärke im Inneren von B , also um wieviel wird der Fluss "mehr"?

wisst, wieviel Fluss über den Rand nach draußen geht.

Im Dreidimensionalen:

Satz von Gauß

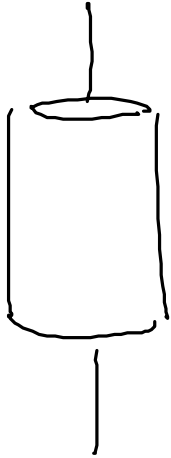
$$\boxed{\iiint_B \text{div } v \, dV = \iint_{\partial B} v \cdot n \, dO}$$



Beispiel

gegeben Vektorfeld: $v = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{3} \\ (x+y)z \\ y^2 z \end{pmatrix}$

Die Fläche ist Zylindermantel



$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2 + y^2 = 2^2}_{\text{Radius}=2}, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 10 \right\}$$

Der Fluss durch den Zylindermantel kann laut Satz v-Gangß berechnet werden, als

$$\oint_{\partial B} v \cdot d\vec{O} = \iiint_B \operatorname{div} v \, dV = \iiint_B (x^2 + z + y^2) \, dV$$

Übergang zu Zylind.koord.

$$= \int_0^{10} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{r^2 \cos^2 \varphi + z + r^2 \sin^2 \varphi}_{r^2 + z} \right) r \, d\varphi \, dr \, dz$$

$$= \int_0^{10} \int_0^2 \left[(r^3 + zr) \varphi \right]_0^{2\pi} \, dr \, dz = \dots = \dots = 140\pi$$

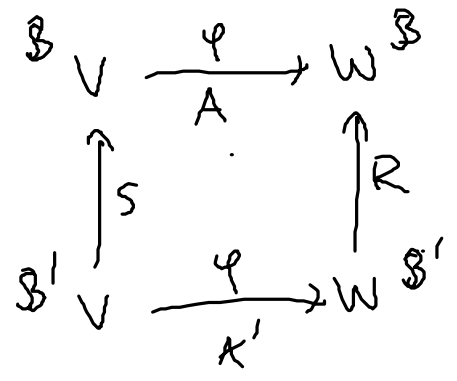
Feriansprechstunden: LZM, Assis + Doz ebenfalls
(am besten per Email ankündigen)

Ein paar Begriffe + Konzepte + Fragen aus Reihe II

Kap. 6 Lineare Algebra

- Begriff Vektorraum, Unterraum
- Linearkombination, lineare Hülle, Erzeugendensystem
- linear abhängig, linear unabhängig

- Basis, Dimension, Standardbasis
- LGS, homogen, inhomogen, Koeffizientenmatrix, erweiterte Koeff. matrix
- Lösbarkeit von LGS (eindeutig, ∞ viele, nicht)
- Matrizen, rechnen damit \rightarrow verschiedene Kriterien
- Gauß-Algorithmus
- Rang einer Matrix, was kann ich da ablesen?
- Bestimmen aller Lösungen eines LGS (spezielle Lsg + allg. Lsg)
- Bestimmen einer Basis + Dimension
- Matrixmultiplikation (auch: \approx Verkettung lin. Abb.)
- Matrix als Darstellung bzgl. einer Basis einer lin. Abb.
- A^T , symmetrisch, A^{-1} , Bestimmung d. Inversen
- wann A invertierbar \rightarrow mehrere Kriterien
- Basiswechsel, Transformationsmatrix
- Diagonalmatrix
- Determinanten, was kann ich damit machen?



Berechnung? \rightarrow Gauß, Determinanten/Sarrus, Entwicklung,

- Cramer Regel
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume, char. Polynom
 - algebraische / geometrische Vielfachheit
- Diagonalisierbarkeit, Basis aus Eigenvektor
- Orthogonalbasis / Gram-Schmidt-Verfahren / orthog. Matrizen

- was sagen dann Eigenwerte etc. über die Abb.?
- quadratische Formen, Hauptachsentransformation
- Transformation einer Quadrik auf Normalform, Typ-erkennung.

Kap. 7

- Darstellung von Mengen, Rand, offen, abgeschlossen
- Stetigkeit höherdim. Funktionen
- Niveaulinien
- partielle Ableitung, Gradient, Bedeutung des Gradienten
- Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit der partiellen Abl.)
- Totale Ableitung (= lineare Approximation)
- Tangentialebene (Gleichung aufstellen)
- Näherungsrechnung damit
- Newtonverfahren
- Richtungsableitung, Abstieg, partielle Abl. sind spezielle Richtungsableitungen
- Gradientenverfahren
- Taylorformel (bis 2. Ordnung aufstellen können)
- Hessematrix
- Lokale Minima, Maxima, stationäre Punkte, Sattelpunkte, Extremwerttest über Definitheit der Hessematrix
- Extremwerte unter Nebenbedingungen (verschiedene Methoden)
- Vektorwertige Abbildungen, Funktionalmatrix (= Jacobi-matrix)
- Rotation, Divergenz

Kap 8.

- Doppelintegrale, Flächenberechnung in der Ebene, Normalbereiche!
- Dreifachintegrale
- Transformation in andere Koordinaten, Kartesisch \rightarrow Polar-, Kugel-, Zylinder-
- Kurvenintegrale, Länge von Kurven, Bogenelement
- Parametrisierung von Kurven
- Wann heißt ein Vektorfeld konservativ (Potentialfeld)?
- Was ist eine Stammfunktion eines Vektorfeldes?
gibt es immer eine? wie berechnet man sie?
- Oberflächenintegrale, vektorielles Flächenelement,
- Parametrisieren eine Fläche
- Normalenvektor bestimmen können
- Fläche eines Funktionsgraphen ausrechnen können
- Integralsätze von Green, Stokes, Gauß

VIEL ERFOLG!