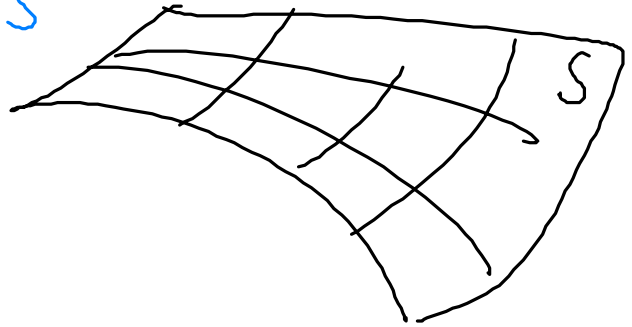


Beim letzten Mal: Oberflächenintegrale

- z.B. Flächeninhalt von gekrümmten Flächen im Raum

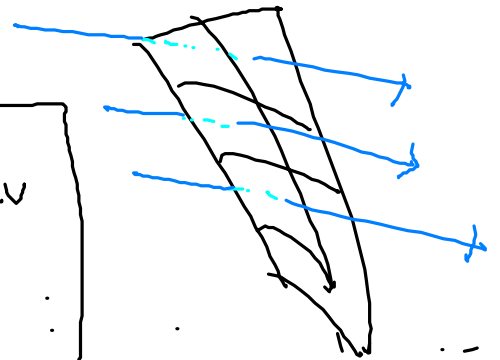
Parametrisierung  $g(u,v)$  der Fläche  $S$

$$\iint_D f(u,v) |g_u \times g_v| du dv$$



- z.B. der "Fluss eines Vektorfeldes" durch eine Fläche im Raum

$$\iint_D v \cdot dO = \iint_D v(g(u,v)) \cdot (g_u \times g_v) du dv$$



Noch ein Beispiel zum zweiten Integral ("Fluss")

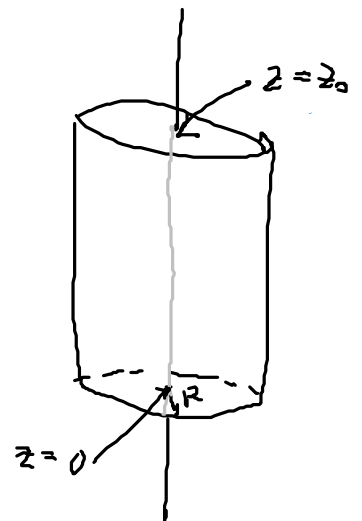
Vektorfeld  $v = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

// gegeben

Fläche  $S =$  Zylindermantel

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$0 \leq z \leq z_0$$



1. Parametrisierung der Fläche  $S$

$$g(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq z_0 \end{cases}$$

2. Bilden des Kreuzprodukts  $g_\varphi \times g_z$

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g_\varphi \times g_z = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Integral nach Formel ausrechnen

$$\iint_S v \cdot dO = \iint_D v(g(\varphi, z)) \cdot (g_\varphi \times g_z) d\varphi dz$$

Formel  
s. oben

einsetzen  
=

$$\int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dz$$

$$R^2 = x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi = R^2$$

D ist Def. bereich der Parameter  
 $\varphi$  und  $z$

$$= \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} (R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi + 0) d\varphi dz$$

$$= \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} d\varphi dz = \dots = \text{"wie gehabt"}$$

Achtung! Die Parametrisierung der Fläche erfolgte in Koordinaten  $(\varphi, z)$ , nicht etwa in  $(r, \varphi, z)$  (Zylinderkoordinaten), weil letztere auch den Zylinder "inhalt" beschreiben, nicht nur die Mantelfläche.

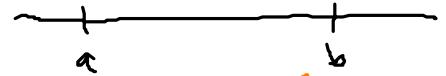
# §6 Integralätze

Erinnerung: In Mathe I "gab es eine Verbindung zwischen differenzieren und integrieren"

## Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$f$  ist Stammfunktion von  $f'$



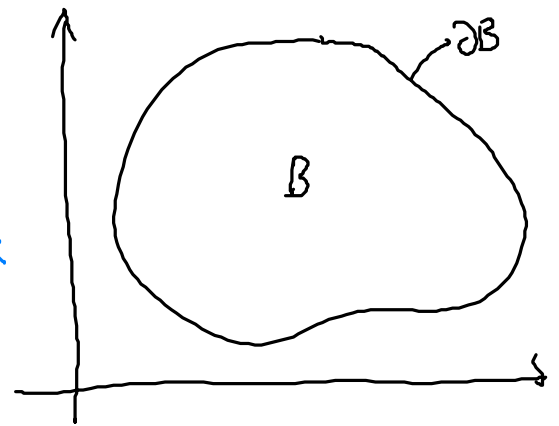
Stammfunktion wird zur Bestimmung des Integrals nur am Rand des Def-bereichs ausgewertet.

Frage

Lässt sich das auf höhere Dimensionen verallgemeinern?

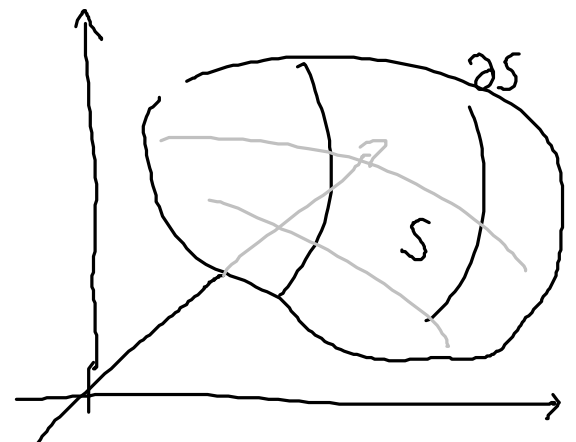
$$\iint_B \dots dF = \iint_{\partial B} \dots ds$$

↑ Flächenelement  
↑ Kurvenstück

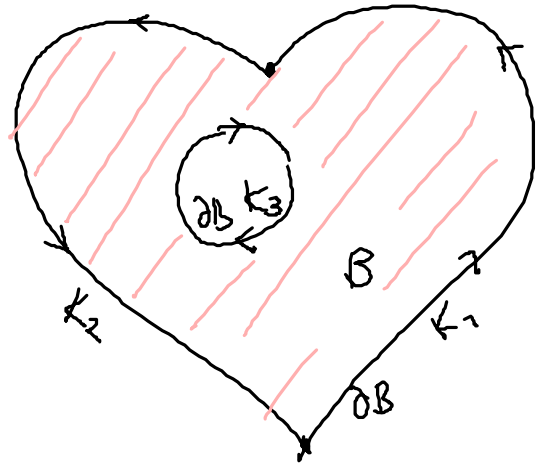
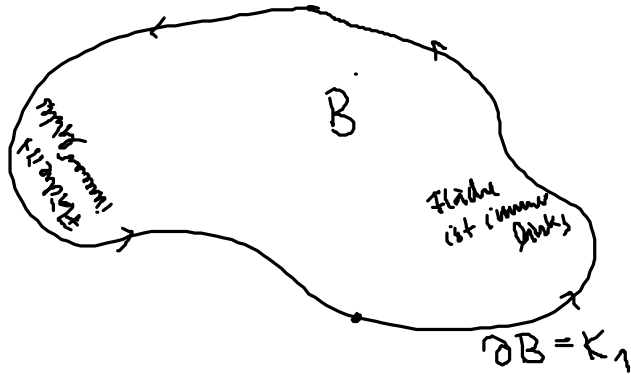


$$\iiint_S \dots dV = \iiint_{\partial S} \dots dO$$

↑ Volumen  
↑ Oberfläche



Dazu: Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  ein regulärer Bereich im  $\mathbb{R}^2$  und der Rand  $\partial B$  bestehe aus endlich vielen geschlossenen Kurven  $K_1, \dots, K_k$ . Die Parametrisierung sei so, dass  $B$  stets links zur Durchlaufrichtung liegt.



### Definition

Unter dem Integral eines Vektorfeldes  $v$  versteht man

$$\int_{\partial B} v \cdot dx = \int_{K_1} v \cdot dx + \int_{K_2} v \cdot dx + \dots + \int_{K_k} v \cdot dx$$

für die Fläche  
im obigen Bsp  $\odot$  würde man die Fläche des Kreises vom Herz abziehen

Das ist nichts Unerwartetes, wenn man entlang einer Kurve integriert, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt ist, darf man entlang der einzelnen Stücke integrieren und die Summe bilden



$$= \dots = -\frac{9}{10}$$

// das konnten wir schon

b) mit dem Satz von Green (alternativ)

$$\int_K v \cdot dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_B \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

wobei  $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-3x^2 - 3\sqrt{x}) dy dx = \int_0^1 -3 \left[ (x^2 - \sqrt{x}) y \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 -3(x^2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} - x^2) dx = \dots = -\frac{9}{10}$$

Es mag sich manchmal anbieten, die alternative Rechenweise anzuwenden, wenn sich die Rechnung vereinfacht.

Verallgemeinerung auf räumliche Flächen (d.h.: ebene Flächen)

Satz (Satz von Stokes)

Sei  $S$  eine stückweise reguläre Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit einem stückweise regulären geschlossenen Rand  $\partial S$  und  $v$  ein auf  $S$  definiertes, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.

Dann gilt

$$\underbrace{\iint_S \operatorname{rot} v \cdot d\mathbf{O}}_{\text{Oberflächenintegral}} = \underbrace{\oint_{\partial S} v \cdot dx}_{\text{Kurvenintegral}}$$

wobei  $\partial S$  so durchlaufen wird, dass die Fläche  $S$  "links" liegt, wenn man in Richtung der Flächen-  
normale schaut (s.u.)



bildlich für ebenes  $S$ :

