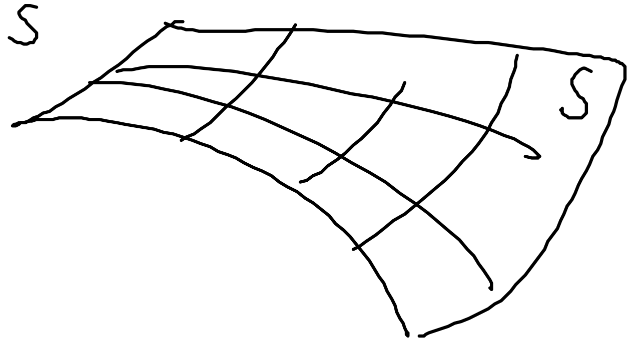
Beim letzten Mal: Oberflächenintegrale

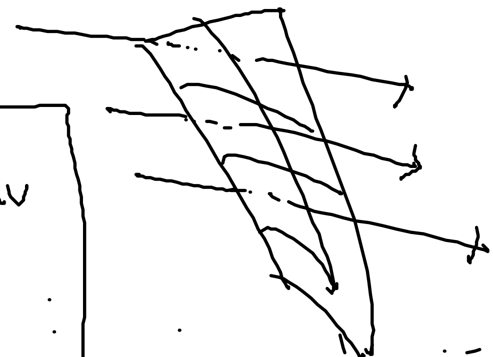
– z.B. Flächeninhalte von gekrümmten Flächen im Raum

Parametrisierung $g(u,v)$ der Fläche S



$$\boxed{\iint_D f(u,v)\,|g_u \times g_v|\,du\,dv}$$

– z.B. der „Fluss eines Vektorfeldes" durch eine Fläche im Raum



$$\boxed{\iint_D v \cdot dO = \iint_D v(g(u,v)) \cdot (g_u \times g_v)\,du\,dv}$$

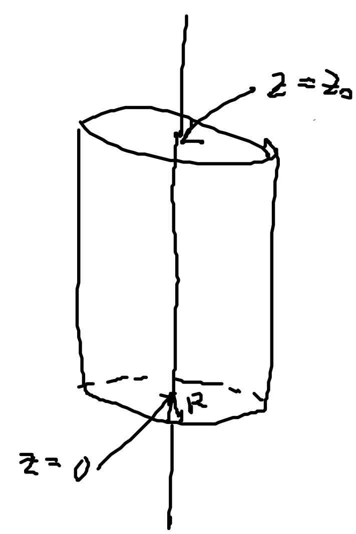
Noch ein Beispiel zum zweiten Integral („Fluss")

Vektorfeld $v = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ // gegeben

Fläche S = Zylindermantel

$x^2+y^2=R^2$

$0 \le z \le z_0$



1. Parametrisierung der Fläche S

$$g(\varphi,z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le z_0 \end{matrix}$$

2. Bilden des Kreuzproduktes $g_\varphi \times g_z$

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_\varphi \times g_z = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Integral nach Formel ausrechnen

$$\iint\limits_S v \cdot dO = \iint\limits_D v(g(\varphi,z)) \cdot (g_\varphi \times g_z)\, d\varphi\, dz$$ // Formel s. oben

$$\overset{\text{einsetzen}}{=} \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} \cdot \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}}^{v(g(\varphi,z))} \cdot \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dz$$

$R^2 = x^2+y^2 = R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi = R^2$

D ist Def. bereich der Parameter φ und z

$$= \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} \underbrace{(R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi + 0)}_{R^2} d\varphi\, dz$$

$$= \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi} \frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} d\varphi\, dz = \ldots = \text{„wie gehabt"}$$

Achtung! Die Parametrisierung der Fläche erfolgte in Koordinaten (φ, z), nicht etwa in (r, φ, z) (Zylinderkoordinaten), weil letztere auch den Zylinder „inhalt" beschreiben, nicht nur die Mantelfläche.

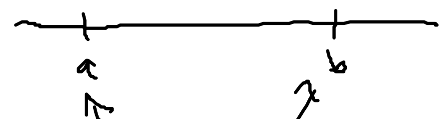
§6 Integralsätze

Erinnerung: In Mathe I „gab es eine Verbindung zwischen differenzieren und integrieren"

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)}$$

f ist Stammfunktion von f'



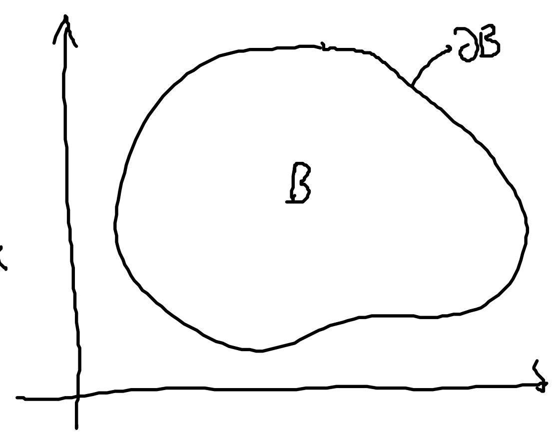
Stammfunktion wird zur Bestimmung des Integrals nur am Rand des Def-bereichs ausgewertet.

Frage

Lässt sich das auf höhere Dimensionen verallgemeinern?

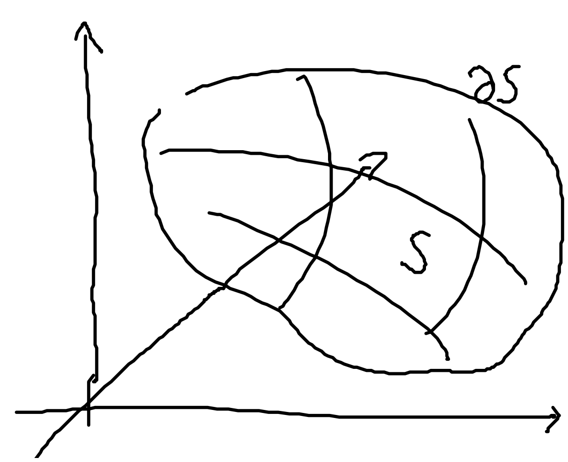
$$\iint_B \dots \underset{\uparrow}{dF} = \iint_{\partial B} \dots \underset{\uparrow}{ds}$$

Flächenstück Kurvenstück

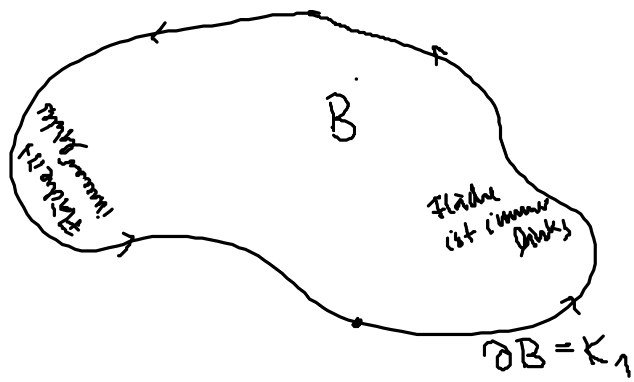


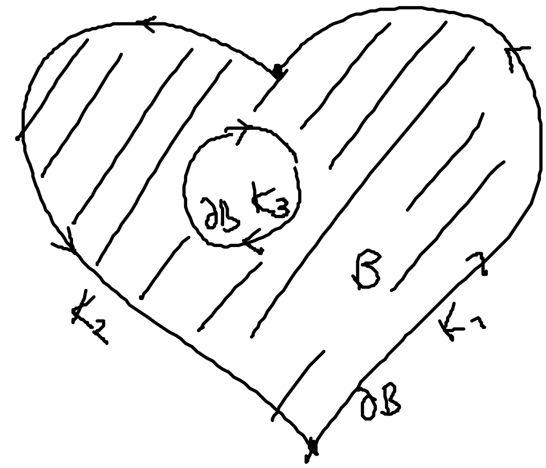
$$\iiint_S \dots \underset{\uparrow}{dV} = \iiint_{\partial S} \dots \underset{\uparrow}{dO}$$

Volumen Oberfläche



Dazu: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich im $\mathbb{R}^2$ und der Rand ∂B bestehe aus endlich vielen geschlossenen Kurven $K_1, \ldots, K_k$. Die Parametrisierung sei so, dass B stets links zur Durchlaufrichtung liegt.





<u>Definition</u>

Unter dem Integral eines Vektorfeldes v versteht man

$$\int_{\partial B} v \cdot dx = \int_{K_1} v \cdot dx + \int_{K_2} v \cdot dx + \ldots + \int_{K_k} v \cdot dx$$

für die Fläche im obigen Bsp ♡ würde man die Fläche des Kreises vom Herz abziehen

Das ist nichts Unerwartetes, wenn man entlang einer Kurve integriert, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt ist, darf man entlang der einzelnen Stücke integrieren und die Summe bilden

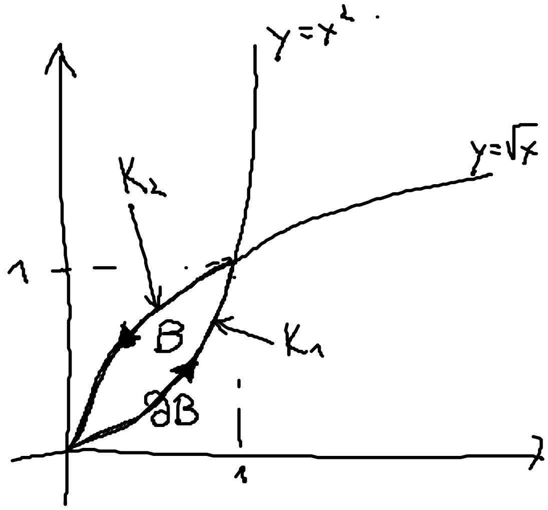
Satz (Satz von Green)

Seien $B, \partial B$ wie oben, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $B \subseteq D$ und $v: D \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges, diff'bares Vektorfeld sein, dann gilt

$$\boxed{\int_{\partial B} v \cdot dx = \iint_B \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2}$$

Beispiel

$$v = \begin{pmatrix} 3y\sqrt{x} \\ -x^3 - y^2 \end{pmatrix}$$



$\partial B = K = K_1 \cup K_2$, wobei

$$K_1 : x(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$K_2 : x(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

⚠ B liegt „rechts" von dieser Kurve K_2

daher Vorzeichen umdrehen ⚠

Berechnung von $\displaystyle\int_{\partial B} v \cdot dx = \int_K v \cdot dx$

a) „direkt"

$$\int_K v \cdot dx = \underbrace{\int_0^1 \overbrace{\begin{pmatrix} 3t^2\sqrt{t} \\ -t^3 - t^4 \end{pmatrix}}^{v(x(t))} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt}^{\substack{\text{Bogenelement} \\ x'(t)\cdot dt}}}_{K_1} - \underbrace{\int_0^1 \overbrace{\begin{pmatrix} 3t^2 \\ -t^6 - t^2 \end{pmatrix}}^{v(x(t))} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt}_{K_2}$$

$$= \int_0^1 \left(3t^2\sqrt{t} - 2t^4 - 2t^5\right) dt - \int \left(6t^3 - t^6 - t^2\right) dt$$

$$= \dots = -\frac{9}{10}$$

// das konnten wir schon

b) mit dem Satz von Green (alternativ)

$$\int_K v \cdot dx \overset{\text{Green}}{=} \iint_B \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

wobei $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 ,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(-3x^2 - 3\sqrt{x}\right) dy\,dx = \int_0^1 -3\left[\left(x^2 - \sqrt{x}\right) y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 -3\left(x^2 - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \dots = -\frac{9}{10}$$

Es mag sich manchmal anbieten, die alternative Rechenweise anzuwenden, wenn sich die Rechnung vereinfacht.

<u>Verallgemeinerung auf räumliche Flächen</u> (oben: ebene Flächen)

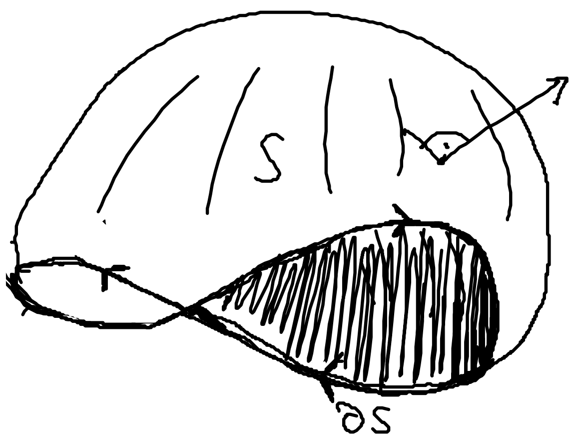
<u>Satz (Satz von Stokes)</u>

Sei S eine stückweise reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit einem stückweise regulären geschlossenen Rand ∂S und v ein auf S definiertes, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.

Dann gilt

$$\underbrace{\iint_S \mathrm{rot}\, v \cdot dO}_{\text{Oberflächenintegral}} = \underbrace{\oint_{\partial S} v \cdot dx}_{\text{Kurvenintegral}}$$

wobei ∂S so durchlaufen wird, dass die Fläche S „links" liegt, wenn man in Richtung der Flächennormale schaut (s.u.)



bildlich für ebenes S: