

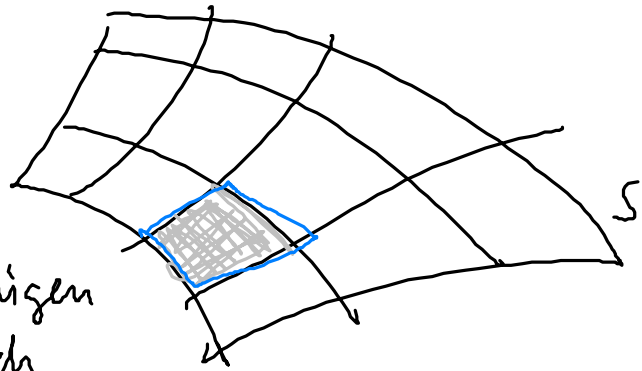
Klausur/Anmeldemodalitäten: nach wie vor zu viel Unklarheit

→ Infoblatt auf unserer Webseite

insb.: Wer Mathematik I+II offiziell nicht bestanden hat, d.h. für beide Teile im damaligen Prüfungssektor angemeldet war und nicht genügend Punkte hatte, hat keinen Anspruch auf die „Ritter-Regelung“.

gestern: Oberflächenintegrale

Man belüftet sich beim „Zusammenzählen“ der krummlinigen Flächenelemente



Approximation von ebenen Flächenelementen in der Tangentialebene

Führe gestern auf

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Oberfläche /} \\ \text{Flächeninhalt} \end{array} O(S) = \iint_D d\sigma = \iint_D |g_u \times g_v| du dv$$

Def. bereich der Parameter u, v („Längen- / Breitengrade“)

Speziell: Der Oberflächeninhalt eines Funktionsgraphen

$$z = f(x, y)$$

Parametrisierung

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad g_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad g_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

$$g_x \wedge g_y = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 0 = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$$

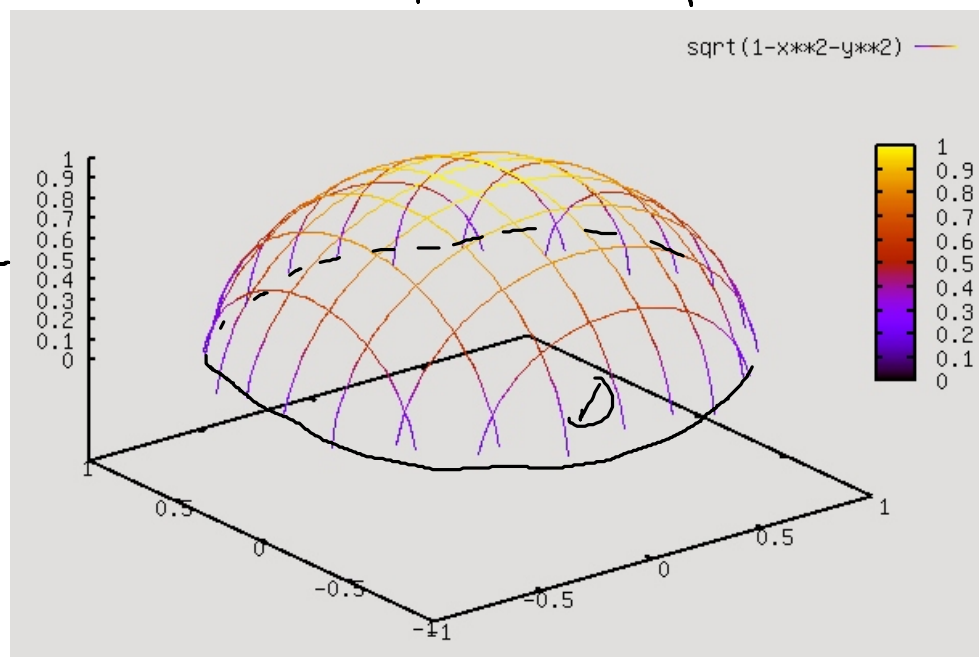
Def. bereich für f

Beispiele

1) Halbkugel

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

deun $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
beschreibt Kugel



benötigt: f_x, f_y

$$f_x = -\frac{2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y = -\frac{2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

in Formel einsetzen: $0 = \iint_D d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$

Dieses Integral so (in Kart. Koord.) schwierig zu lösen
 → Koordinatentransformation auf Polar Koordinaten, weil D ein Kreis
 (vor zwei Wochen)

$$D = \text{Kreis-} \\ \text{scheibe} \quad x^2 + y^2 \leq R^2$$

$$\rightarrow 0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \underbrace{r^2}_{x^2+y^2}}} \cdot \underbrace{r}_{\text{lt. Formel}} d\varphi dr$$

lt. Formel

// diese Transf.
 ist der „Trick“,
 der einem
 einfallen muss
 (→ Routine)

$$= 2\pi r \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$$

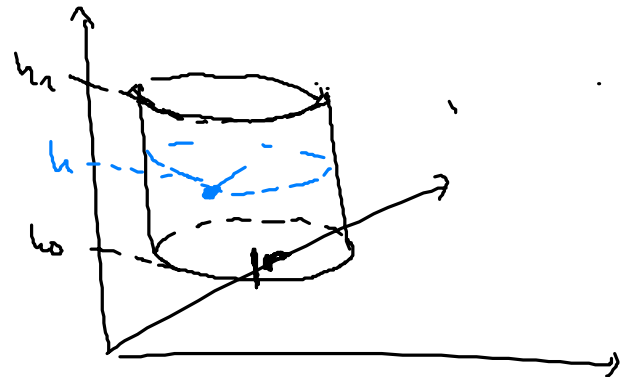
$$= -2\pi R \left[\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2$$

⇒ Oberfläche einer Kugel ist $4\pi R^2$

Beispiel

Oberfläche eines Zylinders

Zylinderkoordinaten bieten sich an:



$$g(h, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ h_0 \leq h \leq h_1 \end{matrix}$$

benötigt g_h, g_φ

$$g_h(h, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_\varphi(h, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_h \times g_\varphi = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |g_h \times g_\varphi| = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r$$

$-[0 - (-r \sin \varphi)]$

→ Mantelfläche $O(M) = \iint_D dO = \int_{h_0}^{h_1} \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dh$

$$= r \cdot 2\pi \int_{h_0}^{h_1} 1 \, dh = r \cdot 2\pi (h_1 - h_0)$$

So wie bei Kurvenintegralen lässt sich all dies „hochziehen“ auf Skalar- / Vektorfelder

Definition

Sei S gegeben $g: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche

a) Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann heißt

$$\iint_D f(u, v) \cdot |g_u \times g_v| \, du \, dv$$

das Oberflächenintegral der Funktion f über S

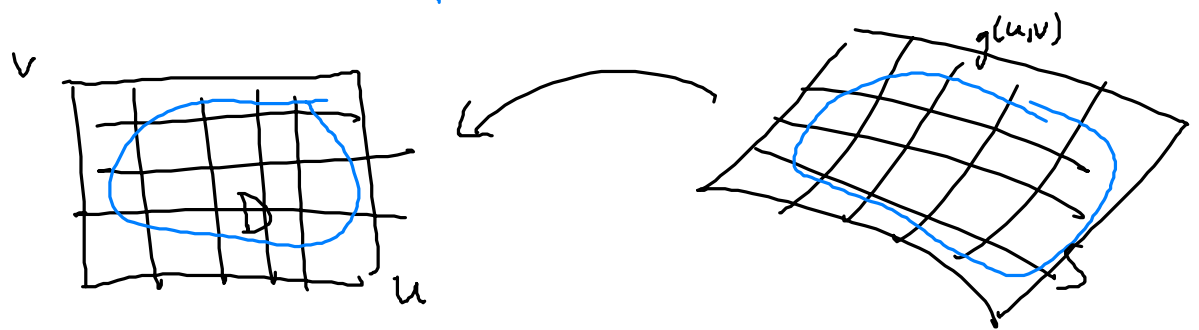
Spezialfall eben: $f(u,v) = 1$ gibt Oberfläche

b) Ist $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld, so heißt

$$\iint_S f \, dO := \iint_D f(g(u,v)) |g_u \times g_v| \, du \, dv$$

das Oberflächenintegral des skalar Feldes f über S

Selbst wenn „Funktionswerte“ direkt auf der Fläche S gegeben sind, rechnet man mit der Parametrisierung der Fläche, d.h. mit D



c) Ist $v: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, so heißt

$$\iint_S v \cdot dO := \iint_D v(g(u,v)) \cdot (g_u \times g_v) \, du \, dv$$

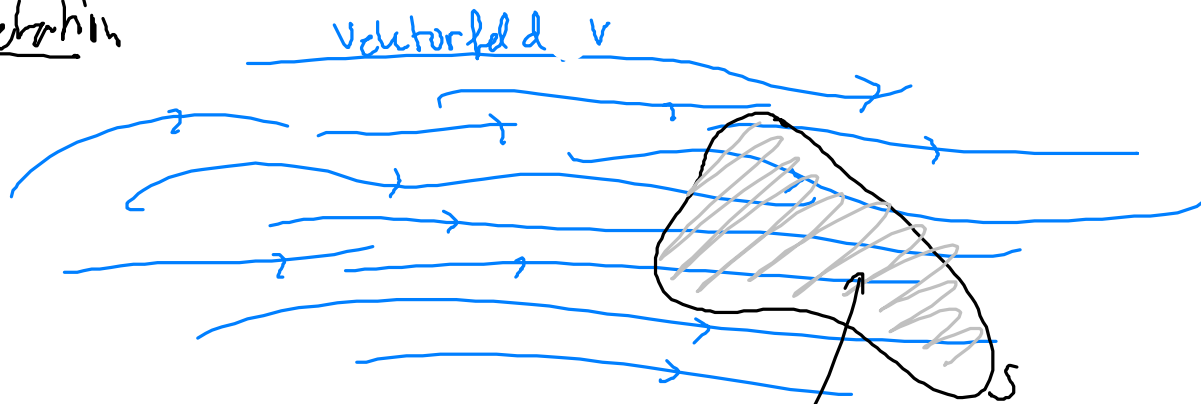
Skalarprodukt, vgl. Kurvenintegrale

das Oberflächenintegral des Vektorfeldes v über S :

Man nennt $\iint_S v \cdot dO$ den Fluss des Vektorfeldes v durch S

$dO := (g_u \times g_v) du dv$ heißt das vektorielle Flächenelement

Interpretation



Wieviel Fluss(menge) geht durch diese Fläche? $= \iint_S v \cdot dO$

Beachte

$\iint_S v \cdot dO$ hängt von der Reihenfolge der Faktoren g_u, g_v

im Kreuzprodukt $g_u \times g_v$ und damit von der Reihenfolge der u, v ab. Ein Vertauschen der Reihenfolge ändert das Vorzeichen und damit die Richtung des Flusses.

\Rightarrow während der Rechnung nicht vertauschen.

Beispiele

Vektorfeld

$$v = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Wunsch: Berechne Fluss von v durch Fläche S

1. Fläche $S = \text{Halbkugel}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$$

Berechne: $\iint_S v \cdot d\mathbf{o}$

1. Schritt: Parametrisierung von S (üben!)

$$g(u, v) = R \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

// so geht das immer für (Halb-)Kugeln

2. Schritt: Berechnung des vektoriellen Flächenelements

$$\begin{aligned} g_u \times g_v &= \begin{pmatrix} -R^2 \cos u \sin^2 v & 0 \\ 0 & -R^2 \sin u \sin^2 v \\ -R^2 \sin^2 u \sin v \cos v & -R^2 \cos^2 u \sin v \cos v \end{pmatrix} \\ &= R^2 \sin v \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

beachte: dieser Vektor zeigt nach innen



d.h. wollte man den Fluss von innen nach außen bestimmen, müsste man das Vorzeichen von $g_u \times g_v$ wechseln.

3. Schritt Berechnung des Doppelintegrals

$$\iint_S v \cdot d\vec{o} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(g(u,v)) \cdot (g_u \times g_v) \, dv \, du$$

Parametrisierung
in Vektorfeld
ansetzen \rightarrow

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R^3} \left(R \cdot \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \, dv \, du$$

$g(u,v)$

Skalarprodukt

$$R^2 \sin v \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \, dv \, du$$

vekt.
Flächenelement

kommt aus $v = \frac{1}{R^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \underbrace{(\cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v)}_{=1 \cdot 1} \, dv \, du$$

$$= \int_0^{2\pi} [-\cos v]_0^{\frac{\pi}{2}} \, du = \int_0^{2\pi} 1 \, du = 2\pi$$