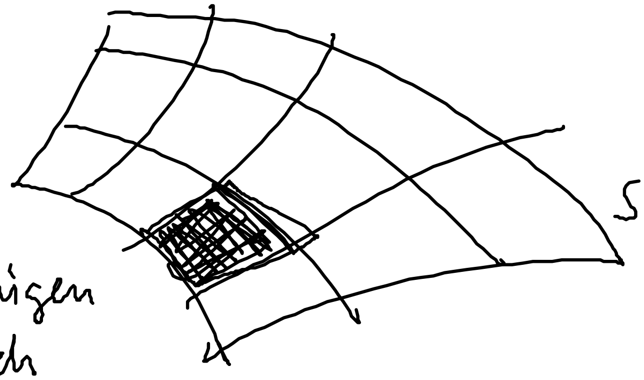
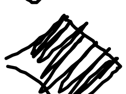
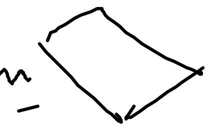
Klausur-/Anmeldemodalitäten: nach wie vor zu viel Unklarheit

→ Infoblatt auf unserer Webseite

insb.: Wer Mathe I+II offiziell nicht bestanden hat, d.h. für beide Teile im damaligen Prüfungssem. angemeldet war und nicht genügend Punkte hatte, hat keinen Anspruch auf die „Ditter-Regelung".

gestern: Oberflächenintegrale



Man behilft sich beim „Zusammenzählen" der krummlinigen Flächenstückchen  durch Approximation von ebenen Flächenstückchen  in der Tangentialebene

Führte gestern auf

$$\boxed{O(S) = \iint_D dO = \iint_D |g_u \times g_v|\,du\,dv}$$

Oberfläche/Flächeninhalt

Def.bereich der Parameter u,v („Längen-/Breitengrade")

Speziell: Der Oberflächeninhalt eines Funktionsgraphen

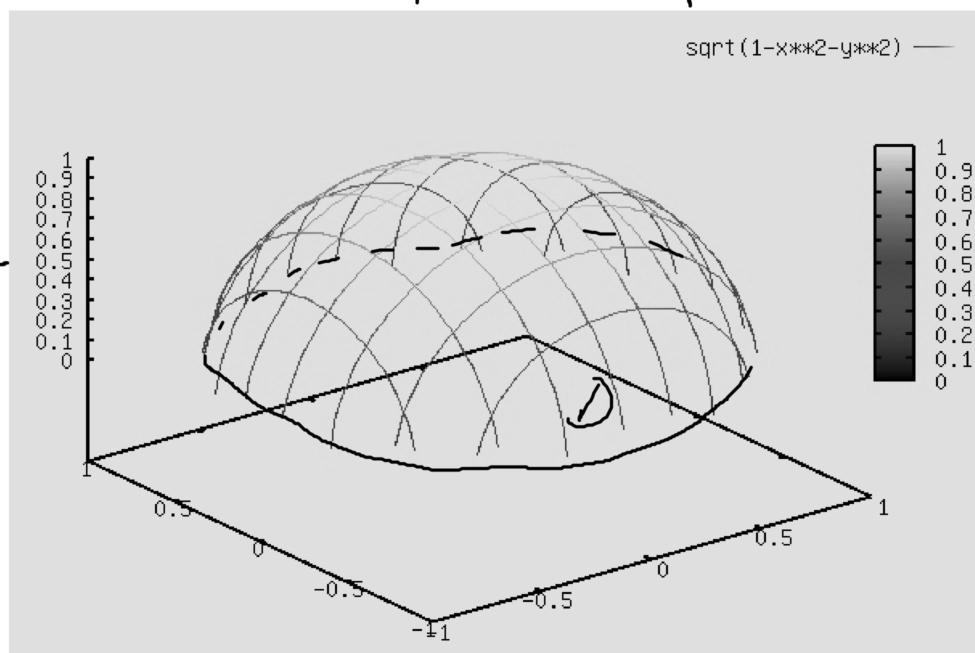
$z = f(x,y)$

Parametrisierung

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \quad g_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad g_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

$$g_x \times g_y = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{O = \iint_{D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy}$$

Def. bereich für f



Beispiele

1) Halbkugel

$$z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

// denn $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ beschreibt Kugel

benötigt: f_x, f_y

$$f_x = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad f_y = -\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

in Formel einsetzen: $O = \iint_D dO = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$

$$= \iint \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = \iint \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

D D

Dieses Integral ist (in kart. Koord.) schwierig zu lösen
→ Koordinatentransformation auf Polar Koordinaten, weil D ein Kreis
(vor zwei Wochen)

$D =$ Kreisscheibe, $x^2 + y^2 \le R^2$

$$\Rightarrow \quad O = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \underbrace{r^2}_{\substack{x^2+y^2 \\ \text{lt. Formel}}}}} \cdot \underbrace{r \, d\varphi \, dr}_{\text{lt. Formel}}$$

// diese Transf. ist der „Trick", der einem auffallen muss (→ Routine)

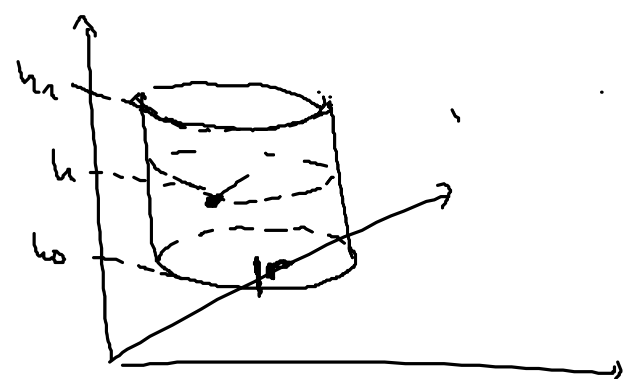
$$= 2\pi r \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr$$

$$= -2\pi R \left[\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = 2\pi R^2$$

⇒ Oberfläche einer Kugel ist $4\pi R^2$ //

__Beispiel__

Mantelfläche eines Zylinders



Zylinderkoordinaten bieten sich an:

$$g(h, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \\ h \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 \le \varphi < 2\pi \\ h_0 \le h \le h_1 \end{array}$$

benötigt g_h, g_φ

$$g_h(h,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_\varphi(h,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-[0-(-r\sin\varphi)]$

$$g_h \times g_\varphi = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |g_h \times g_\varphi| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$$

$$\Rightarrow \text{Mantelfläche } O(M) = \iint_D dO = \int_{h_0}^{h_1}\int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dh$$

$$= r \cdot 2\pi \int_{h_0}^{h_1} 1 \, dh = r \cdot 2\pi (h_1 - h_0)$$

Ebenso wie bei Kurvenintegralen lässt sich all dies „hochziehen" auf Skalaren-/Vektorfelder

<u>Definition</u>

Sei S gegeben $g: \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche

a) Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt

$$\iint_D f(u,v) \cdot |g_u \times g_v| \, du \, dv$$

das <u>Oberflächenintegral der Funktion f über S</u>

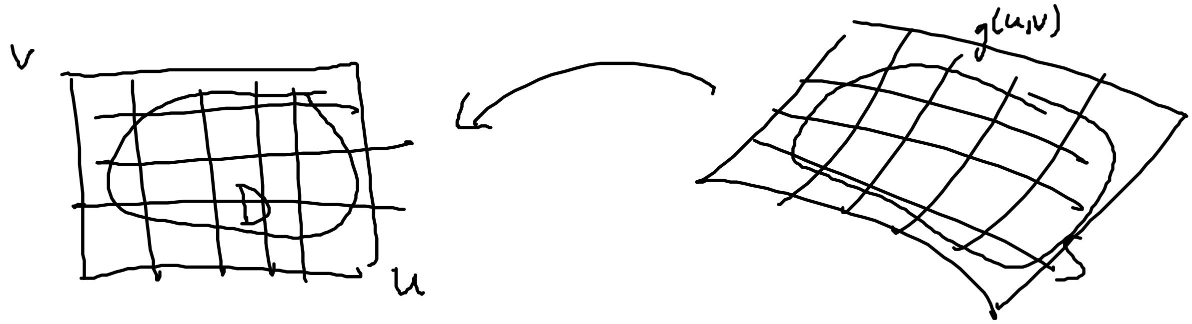
Spezialfall eben: $f(u,v)=1$ gibt Oberfläche

b) Ist $f: S \to \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarenfeld, so heißt

$$\iint_S f \, dO := \iint_D f(g(u,v)) \, |g_u \times g_v| \, du\,dv$$

das <u>Oberflächenintegral des skalaren Feldes f über S</u>

Selbst wenn „Funktionswerte direkt auf der Fläche S gegeben sind", rechnet man mit der Parametrisierung der Fläche, d.h. mit D



c) Ist $v: S \to \mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld, so heißt

$$\iint_S v \cdot dO := \iint_D v(g(u,v)) \cdot (g_u \times g_v) \, du\,dv$$

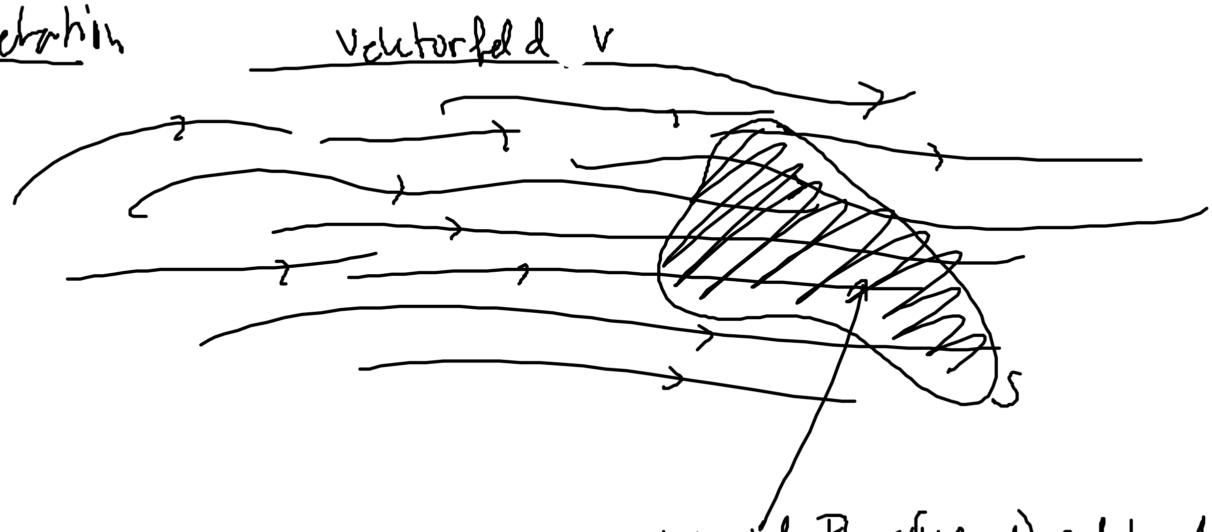
Skalarprodukt, vgl. Kurvenintegrale

das <u>Oberflächenintegral des Vektorfeldes v über</u> S.

Man nennt $\iint v \cdot dO$ den <u>Fluss</u> des Vektorfeldes v durch S

$dO := (g_u \times g_v)\,du\,dv$ heißt das <u>vektorielle Flächenelement</u>

<u>Interpretation</u>



wieviel Fluss(menge) geht durch diese Fläche? $= \iint_S v \cdot dO$

<u>Beachte</u>

$\iint_S v \cdot dO$ hängt von der Reihenfolge der Faktoren g_u, g_v im Kreuzprodukt $g_u \times g_v$ und damit von der Reihenfolge der u, v ab. Ein Vertauschen der Reihenfolge ändert das Vorzeichen und damit die Richtung des Flusses.

⇒ während der Rechnung nicht vertauschen.

<u>Beispiele</u>

Vektorfeld $\quad v = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Wunsch: Berechne Fluss von v durch Fläche S

1. Fläche S = Halbkugel $\quad x^2+y^2+z^2=R^2, \quad z\geq 0$

Berechne: $\displaystyle\iint_S v \cdot dO$

1. Schritt: Parametrisierung von S (üben!)

$$g(u,v) = R\begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

// so geht das immer für (Halb-)Kugeln

2. Schritt Berechnung des vektoriellen Flächenelements

$$g_u \times g_v = \begin{pmatrix} -R^2\cos u \sin^2 v - 0 \\ 0 - R^2 \sin u \sin^2 v \\ -R^2 \sin^2 u \sin v \cos v - R^2\cos^2 u \sin v \cos v \end{pmatrix}$$

$$= R^2 \sin v \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos v \end{pmatrix}}$$

beachte: dieser Vektor zeigt nach innen

d.h. wollte man den Fluss von innen nach außen bestimmen, müsste man das Vorzeichen von $g_u \times g_v$ wechseln.

3. Schritt Berechnung des Doppelintegrals

$$\iint_S v \cdot dO = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(g(u,v)) \cdot (g_u \times g_v)\, dv\, du$$

⚠ Skalarprodukt

Parametrisierung in Vektorfeld einsetzen →

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cancel{R^3}}\Bigg(\underbrace{\cancel{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}}_{g(u,v)}\Bigg) \cdot \underbrace{R^2 \sin v \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}}_{\text{vekt. Flächenelement}} dv\, du$$

kommt aus $v = \frac{1}{\underbrace{r^3_{\dots}}_{R^3}} \begin{pmatrix} x \\ \cancel{y} \\ z \end{pmatrix}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \,(\underbrace{\cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v}_{=1 \cdot 1})\, dv\, du$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\cos v\right]_0^{\frac{\pi}{2}} du = \int_0^{2\pi} 1\, du = 2\pi$$

//