Nächste Woche: Noch VL (Mo + Di),
vermutlich noch Übungen, keine „Probeklausur",
die Ü-Blätter können dafür verwendet werden
(Stoff auch des letzten Blattes noch relevant!)

Klausur: 23.9. Material: Keine TR, 2 Seiten DIN A4 (≠ 2 Blätter)
eigenhändig handgeschrieben,

Letzte: Kurvenintegrale, Stammfunktionen (eines Vektorfeldes v),
d.h. finde Funktion f mit grad f = v

Beispiel

Gegeben: Vektorfeld $v = \begin{pmatrix} 2xy - z^2\cos x \\ x^2 \\ -2z\sin x \end{pmatrix}$.

1. Frage: Ex. Stammfunktion? Ein Kriterium für 3d-Vektorfelder

$\Updownarrow$

$\operatorname{rot} v = 0$

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ -2z\cos x + 2z\cos x \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$= 0$ ✓

$\Rightarrow$ es ex. Stammfunktion.

Gesucht: f mit grad f = v

Partielle Abl. von f nach x muss x-Komp. von v ergeben

$f_x = 2xy - z^2\cos x$ // nach x integrieren

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2 y - z^2 \sin x + \underbrace{h(y,z)}_{}$ (*)

const, darf nicht von x abhängen, aber allen anderen Variablen

⇒ Partielle Abl. dieses f nach y soll y-Komp. von v ergeben

$$f_y = \underbrace{x^2 + h_y(y,z)}_{(*)\text{ nach } y \text{ abgeleitet}} = \underbrace{x^2}_{y\text{-Komp. von } v} \Rightarrow h_y(y,z) = 0$$

integriere h_y nach y

$\Rightarrow h(y,z) = \underbrace{g(z)}_{}$

const., kann nicht mehr von y abh. aber von z

⇒ Unser Kandidat für f (∗) nach z abgeleitet muss z-Komp. von v ergeben.

$$f_z = \underbrace{0 - 2z\sin x + g_z(z)}_{(*)\text{ nach } z \text{ abgeleitet}} = \underbrace{-2z\sin x}_{z\text{-Komp. von } v}$$

$$\Rightarrow g_z(z) = 0 \Rightarrow g(z) = \text{const.}$$

⇒ zusammensetzen: $f(x,y,z) = \underbrace{x^2y - z^2\sin x + C}_{(*)}$

C: $g(z) = h(y,z)$

Kochrezept:

gesuchtes f soll partiell nach x, y, z, ... abgeleitet die x, y, z, ... – Komponente von v ergeben, also

Ansatz f_x = x-Komp. von v, nach x integrieren, Konstante hängt nicht von x ab

Das so erhaltene f nach y differenzieren, das muss y-Komp. von v sein, nach y integr. Konstante hängt nicht mehr von x, y ab

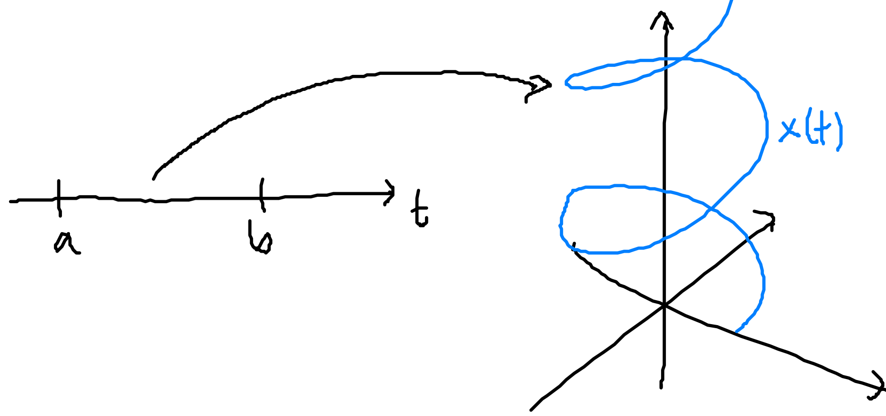
usw.

§5 Integration über Flächen (Oberflächenintegrale)

Erinnerung:

Kurve im $\mathbb{R}^3$

$t \in [a,b] \to x(t) \in \mathbb{R}^3$



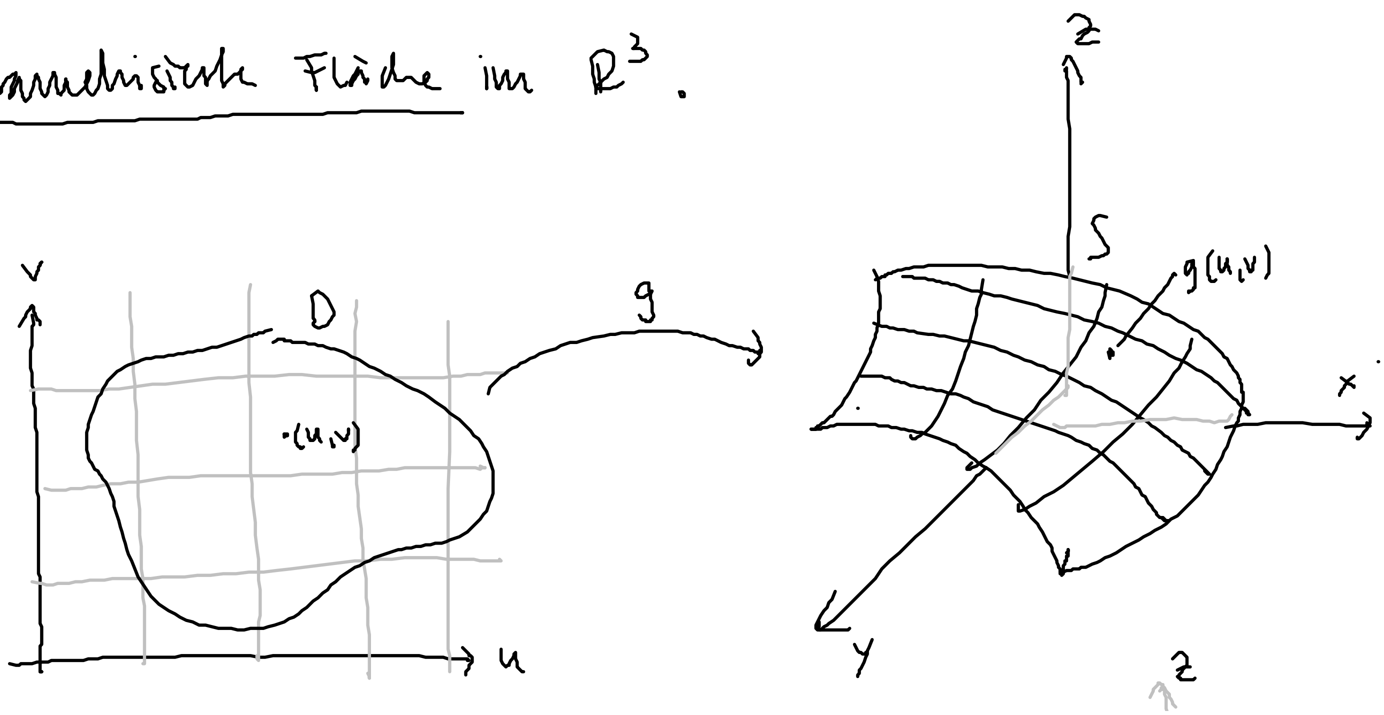
Definition

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich, der aus Normalbereichen (Typ I + II) zusammengesetzt ist in der u-v-Ebene und $g : D \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{stetig.}$$

Dann heißt
$$S = \left\{ g(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \right\}$$

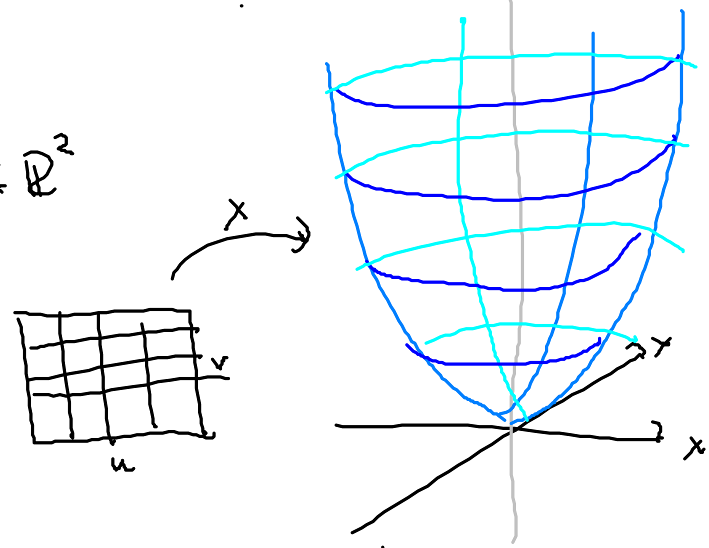
eine <u>parametrisierte Fläche</u> im $\mathbb{R}^3$.



Bsp.

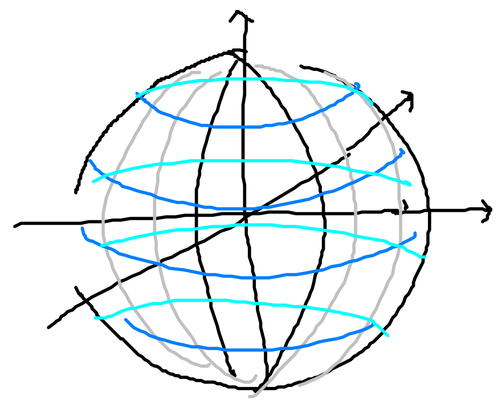
1:0 $\qquad x(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

Paraboloid



Mit den beiden Parametern („Koordinaten") u,v ist jeder Punkt auf der Fläche eindeutig beschrieben.

2:0 $\qquad x(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \sin v \\ \sin u \cdot \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$



$0 \leq u \leq 2\pi$
$0 \leq v \leq \pi$

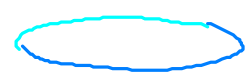
Kugel $\quad x^2+y^2+z^2 = 1$

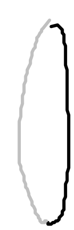
Definition (Fortsetzung)

Die Kurven

$u \longmapsto g(u, v_0) \qquad v_0$ fest

$v \longmapsto g(u_0, v) \qquad u_0$ fest





der Fläche S heißen Parameterlinien
(„Längen- und Breitengrade")

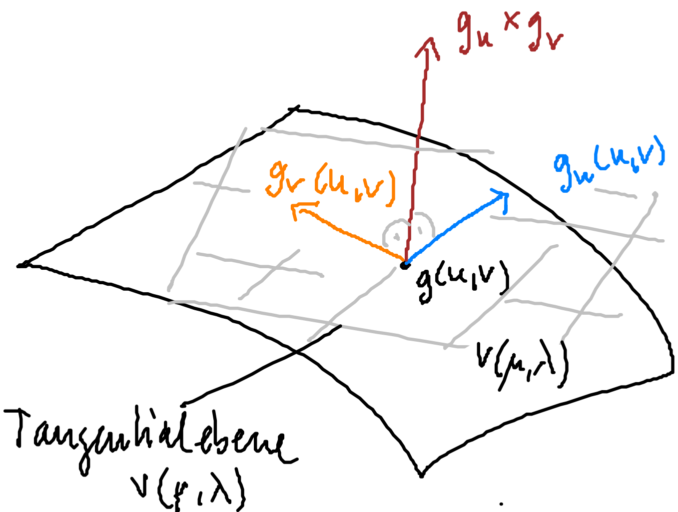
Sind die Funktionen $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ stetig differenzierbar (weder Knick, noch Sprung im Dach) und gilt für $\binom{u}{v} \in D$, dass

$$\boxed{g_u(u,v) \times g_v(u,v) = \begin{pmatrix} y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v \\ z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v \\ x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v \end{pmatrix} \neq 0}$$

dann heißt die Fläche S glatt (regulär).

Beobachtung / Wdh.

Tangentialebene im Punkt $g(u,v)$ wird aufgespannt von $g_u(u,v)$ und $g_v(u,v)$ (s. rechts) und hat Parameterdarstellung:



$$\boxed{v(\mu,\lambda) = g(u,v) + \lambda\, g_u(u,v) + \mu\, g_v(u,v)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Der auf der Tangentialebene senkrecht stehende Einheitsvektor

$$n := \frac{1}{|x_u \times x_v|}(x_u \times x_v) \qquad \left(= \frac{1}{|g_u \times g_v|} \cdot (g_u \times g_v) \right)$$

heißt Normalenvektor (Flächennormale) der Fläche S.

Beispiel

3:0 $\quad g(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}, \quad \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \quad$ (Paraboloid)

Normalenvektor: // benötigt: partielle Abl. nach u, v.

$$g_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \qquad g_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$g_u(u,v) \times g_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0-2u \\ 0-2v \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Paraboloid ist „glatt" / regulär.

Dass es überall einen Normalenvektor gibt ist wichtig, weil dieser in die Formel (das Integral) für die Oberfläche eingeht, die wir berechnen wollen.

Tangentialebene im Punkt $g(1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

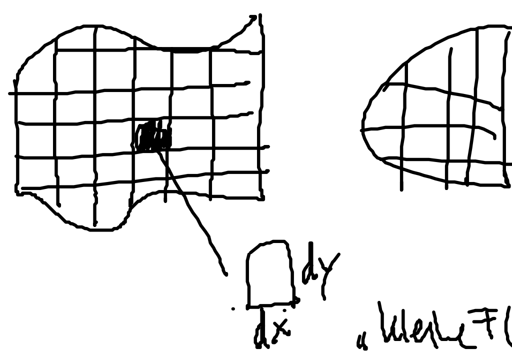
$$v(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normale im Punkt $g(1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$n(1,2) = \frac{g_u(1,2) \times g_v(1,2)}{|g_u(1,2) \times g_v(1,2)|} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}}$$

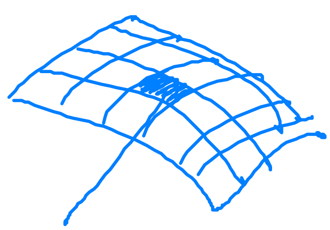
Der Flächeninhalt

Erinnerung: „ebene" Flächen



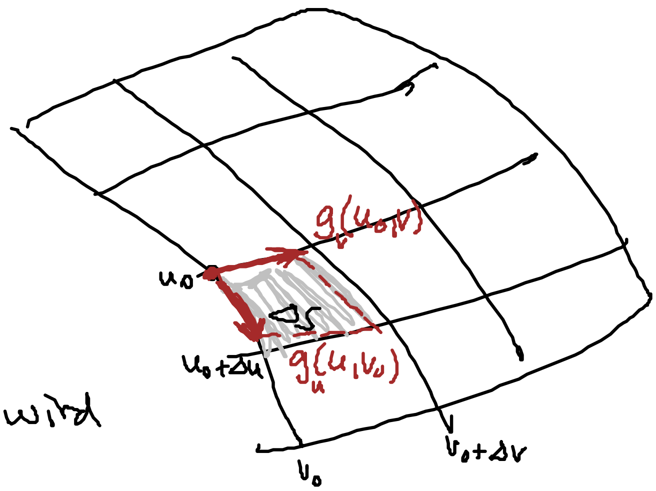
„kleine Flächenstücke" aufsummiert gibt Flächenintegral

Idee nun für gekrümmte Flächen: Summiere wieder kleine Flächenstücke



das „krumme kleine Flächenstück" kann angenähert werden durch ein kleines „ebenes" Flächenstück der Tangentialebene an der Stelle.

Betrachte eine parametrisierte Fläche S gegeben durch
$$g: \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$



Der Flächeninhalt ΔO eines kleinen Teilstücks ΔS, das von den Parameterlinien u, $u=u_0+\Delta u$, v_0 und $v=v_0+\Delta v$ berandet wird,

ist näherungsweise die Fläche des Parallelogramms, das aufgespannt wird durch $g(u_0,v_0)$, $g_u(u,v_0)$, $g_v(u_0,v)$

Damit
$$\Delta O = \Big|\overbrace{(g_u(u,v)\,\Delta u) \times (g_v(u,v)\,\Delta v)}^{\text{Parallelogrammfläche}}\Big|$$
$$= |g_u(u,v) \times g_v(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$$

// dies ist das kleine Flächenstück auf der Tangentialebene

Verfeinerung und Grenzübergang liefert:
Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenstücks gegeben durch $g: \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist

$$\boxed{O(S) = \iint_D dO = \iint_D |g_u \times g_v|\, du\, dv}$$