

Nächste Woche: Noch VL (Mo + Di),
 vermutlich noch Übungen, keine „Probeklausur“,
 die Ü-Blätter können dafür verwendet werden
 (Stoff auch des letzten Blattes noch relevant!)

Klausur: 23.9. Material: keine TR, 2 Seiten DIN A4 (≠ 2 Blätter)
 eigenhändig handgeschrieben,

Letzte: Kurvenintegrale, Stammfunktionen (eines Vektorfeldes v),
 d.h. finde Funktion f mit $\text{grad } f = v$

Beispiel

Gegeben: Vektorfeld $v = \begin{pmatrix} 2xy - z^2 \cos x \\ x^2 \\ -2z \sin x \end{pmatrix}$

Frage: Ex. Stammfunktion? Ein Kriterium für 3d-Vektorfelder

$$\Downarrow$$

$$\text{rot } v = 0$$

$$\text{rot } v = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ -2z \cos x + 2z \cos x \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

⇒ es ex. Stammfunktion.

Gesucht: f mit $\text{grad } f = v$

Partielle Abl. von f nach x muss x -Komp. von v ergeben

$$f_x = 2xy - z^2 \cos x$$

// nach x integrieren

$$\rightarrow f(x, y, z) = x^2 y - z^2 \sin x + \underbrace{h(y, z)}_{(*)} (x)$$

const., darf nicht von x
 abhängen, aber allen
 anderen Variablen

⇒ Partielle Abl. dieses f nach y soll y -Komp. von v ergeben

$$f_y = \underbrace{x^2 + h_y(y, z)}_{(*) \text{ nach } y \text{ abgeleitet}} = \underbrace{x^2}_{y\text{-Komp. von } v} \Rightarrow h_y(y, z) = 0$$

integriere h_y nach y
 $\Rightarrow h(y, z) = \underbrace{g(z)}_{\text{const., kann nicht mehr von } y \text{ abh. aber von } z}$

→ Unser Kandidat für f $(*)$ nach z abgeleitet muss z -Komp. von v ergeben.

$$f_z = \underbrace{0 - 2z \sin x + g_z(z)}_{(*) \text{ nach } z \text{ abgeleitet}} = \underbrace{-2z \sin x}_{z\text{-Komp. von } v}$$

$$\Rightarrow g_z(z) = 0 \Rightarrow g(z) = \text{const.}$$

⇒ zusammenschauen: $f(x, y, z) = \underbrace{x^2 y - z^2 \sin x + C}_{(*)} \quad \begin{matrix} g(z) \\ = h(y, z) \end{matrix}$

Kochrezept:

gesuchtes f soll partiell nach x, y, z, \dots abgeleitet die x, y, z, \dots -Komponente von v ergeben, also

Ansatz $f_x = x$ -Komp. von v , nach x integrieren, Konstante hängt nicht von x ab

Das so erhaltene f nach y differenzieren, das muss y -Komp. von v sein, nach y integr. Konstante hängt nicht mehr von x, y ab

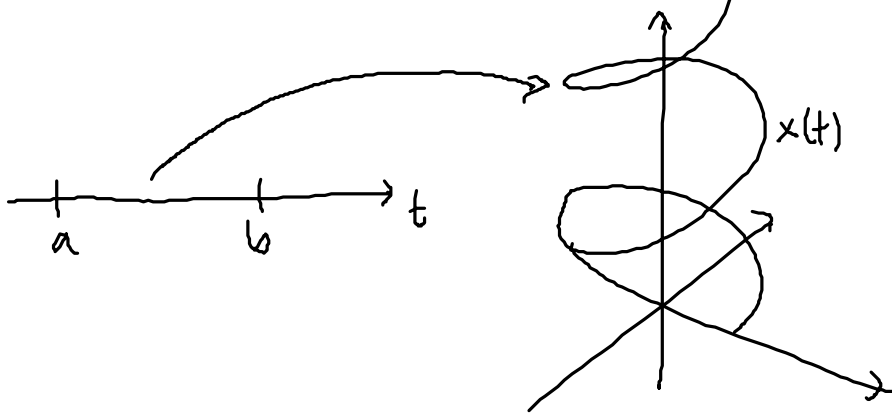
usw.

§5 Integration über Flächen (Oberflächenintegrale)

Erinnerung:

Kurve im \mathbb{R}^3

$$t \in [a, b] \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^3$$



Definition

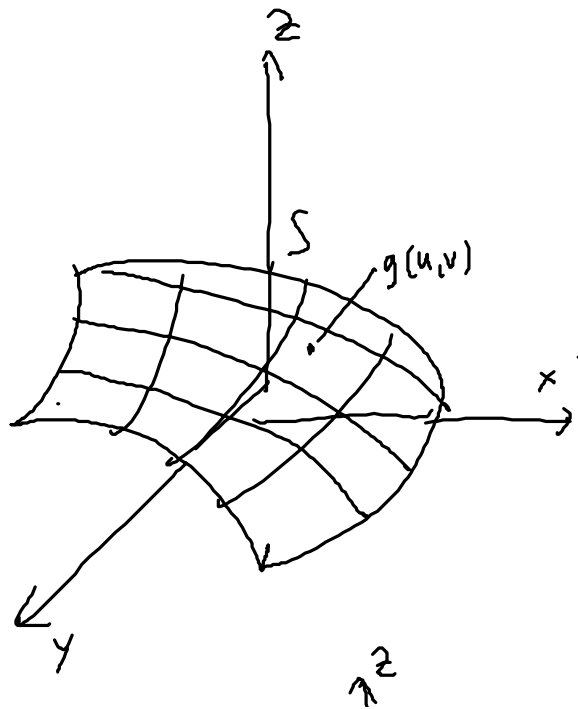
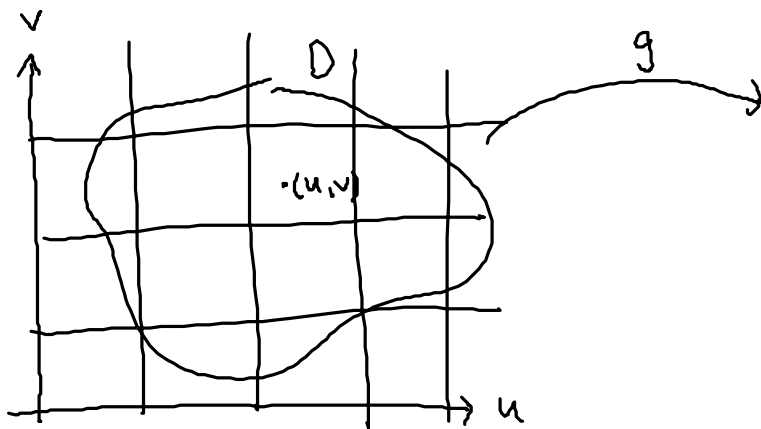
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bereich, der aus Normalbereichen (Typ $I + II$) zusammengesetzt ist in der u - v -Ebene und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$

mit

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{stetig.}$$

Dann heißt $S = \left\{ g(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \mid (u, v) \in D \right\}$

eine parametrisierte Fläche im \mathbb{R}^3 .

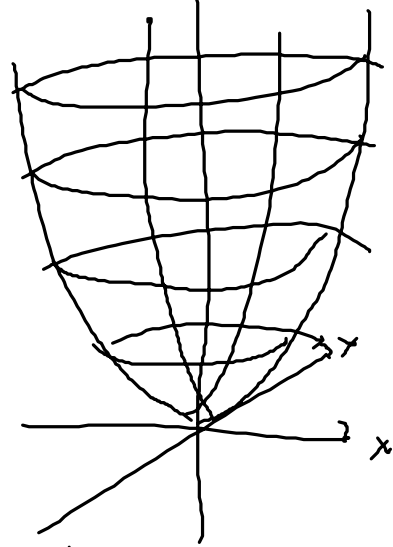
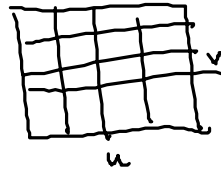


Bsp.

1: 0

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Paraboloid



Mit den beiden Parametern („Koordinaten“) u, v ist jeder Punkt auf der Fläche eindeutig beschrieben

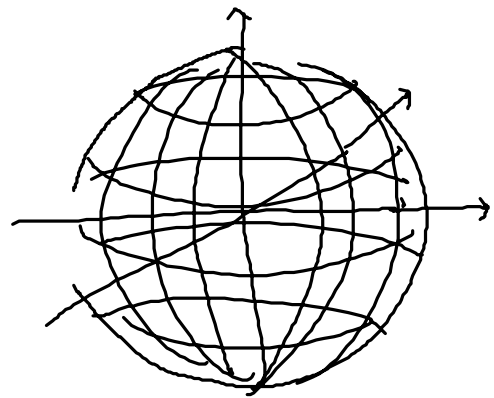
2: 0

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \sin v \\ \sin u \cdot \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

$$0 \leq u \leq 2\pi$$

$$0 \leq v \leq \pi$$

Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Definition (Fortsetzung)

Die Kurven

$$u \mapsto g(u, v_0)$$

v_0 fest

$$v \mapsto g(u_0, v)$$

u_0 fest



der Fläche S heißen Parameterlinien
 („Längen- und Breitengrade“)

Sind die Funktionen $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ stetig differenzierbar (weder Knicke, noch Sprung im Dach)

und gilt für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$, dass

$$g_u(u,v) \times g_v(u,v) = \begin{pmatrix} y_u \cdot z_v - z_u \cdot y_v \\ z_u \cdot x_v - x_u \cdot z_v \\ x_u \cdot y_v - y_u \cdot x_v \end{pmatrix} \neq 0$$

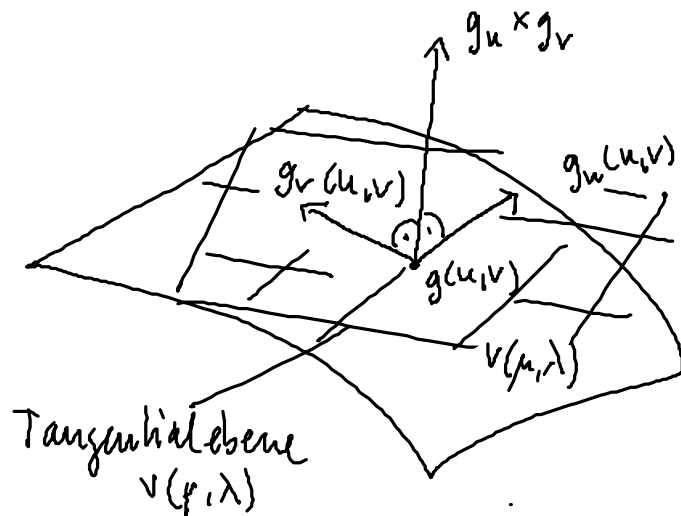
dann heißt die Fläche S glatt (regulär).

beobachtung / w.d.h.

Tangentialebene im Punkt $g(u,v)$ wird aufgespannt von $g_u(u,v)$ und $g_v(u,v)$ (s. rechts) und hat

Parameterdarstellung:

$$v(\mu, \lambda) = g(u,v) + \lambda g_u(u,v) + \mu g_v(u,v), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Der auf der Tangentialebene senkrecht stehende Einheitsvektor

$$n := \frac{1}{|x_u \times x_v|} (x_u \times x_v) \quad \left(= \frac{1}{|g_u \times g_v|} \cdot (g_u \times g_v) \right)$$

heißt Normalenvektor (Flächennormale) der Fläche S .

Beispiel

$$z=0 \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{Paraboloid})$$

Normalenvektor: benötigt: partielle Abl. nach u, v .

$$g_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}$$

$$g_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$g_u(u,v) \times g_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & -2u \\ 0 & -2v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

→ Paraboloid ist „glatt“ / regulär.

Dass es überall einen Normalenvektor gibt ist wichtig, weil dieser in die Formel (das Integral) für die Oberfläche eingesetzt, die wir berechnen wollen.

Tangentialebene im Punkt $g(1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$v(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

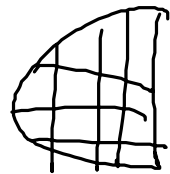
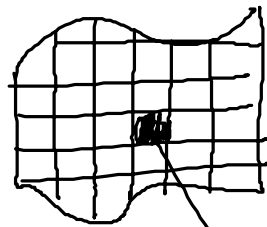
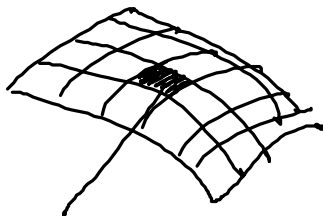
Normale im Punkt $g(1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$n(1,2) = \frac{g_u(1,2) \times g_v(1,2)}{|g_u(1,2) \times g_v(1,2)|} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}}$$

Der Flächeninhalt

Erinnerung: „ebene“ Flächen

Idee um für gekrümmte Flächen: Summiere wieder kleine Flächenelemente



„Kleine Flächenelemente“ aufsummiert gibt Flächenintegral

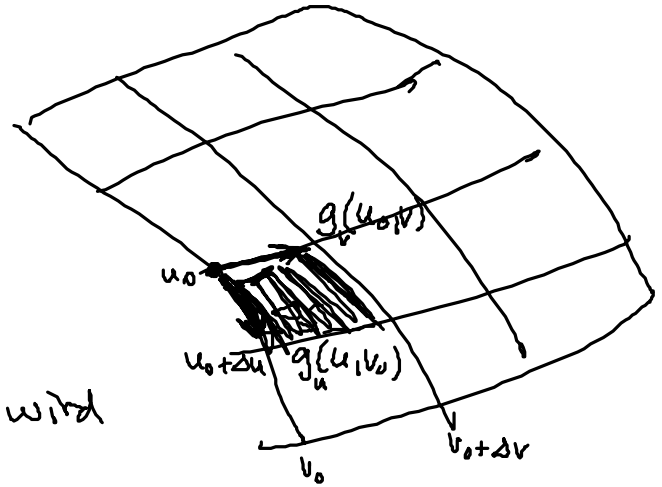
das „Krumme kleine Flächenelement“ kann angenähert werden durch ein kleines „ebenes“ Flächenelement der Tangentialebene

an der Stelle.

Betrachte eine parametrisierte Fläche S gegeben durch
 $g: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $g(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$

Der Flächeninhalt ΔO eines kleinen Teilstückes ΔS , das von den Parameterlinien u , $u = u_0 + \Delta u$, v_0 und $v = v_0 + \Delta v$ berandet wird,

ist näherungsweise die Fläche des Parallelogramms, das aufgespannt wird durch $g(u_0, v_0)$, $g(u_0 + \Delta u, v_0)$, $g(u_0, v_0 + \Delta v)$



Damit

$$\Delta O = \overbrace{\left| (g_u(u,v) \Delta u) \times (g_v(u,v) \Delta v) \right|}^{\text{Parallelogrammfläche}}$$

$$= \left| g_u(u,v) \times g_v(u,v) \right| \Delta u \Delta v$$

// dies ist das kleine
Flächenelement auf
der Tangentialebene

Verfeinerung und Grenzübergang liefert:

Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenelementes gegeben durch $g: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist

$$O(S) = \iint_D dO = \iint_D |g_u \times g_v| du dv$$