Prüfungsanmeldung (über „TUCAN") bis <u>morgen</u> (30.6.2010)

→ <u>zusätzlich</u> (ausschließlich für die „Ritter-Regelung") ab sofort (bis Ende Woche) Anmeldung auf unserer Webseite

Kommentar in VL:
Anmeldung über Studienbüros
(also ggf. nicht über TUCAN)

Tipp: Schaut zum aktuellen Thema z.B. in Meyberg / Vachenauer

Gestern: Kurvenintegrale

$$\int_K g\,ds = \int_a^b g(t)\cdot \underbrace{|x'(t)|\,dt}_{\text{Bogenelement}}$$

insb. Anwendung: Bogenlänge / Kurvenlänge: $g(t) \equiv 1$.

$$L = \int_a^b 1\cdot \underbrace{|x'(t)|}_{\sqrt{(x_1'(t))^2+\ldots+(x_n'(t))^2}}\,dt$$

„<u>Kochrezept</u>"

1. Parametrisieren der Kurve
2. Ableitungen bilden → Bogenelement
3. Integral lösen

Ziel: (Eine mögliche) Verallgemeinerung des Stammfunktionsbegriffs

Definition

Eine Kurve $K: x(t)$, $a \le t \le b$ heißt geschlossen, falls $x(a) = x(b)$.

In Zeichen
(für das Kurvenintegral)

$$\oint_K f \, ds \quad \text{bzw} \quad \oint_K v \, dx$$

Anwendung

Das Integral eines Geschwindigkeitsfelds v längs einer geschlossenen Kurve K

$$\oint_K v \, dx$$

heißt Zirkulation.

Definition

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend.
Ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}^0(G, \mathbb{R}^n)$ // d.h. stetig
heißt konservativ (Potentialfeld, Gradientenfeld), falls es eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R})$ // d.h. stetig differenzierbar mit

$$\boxed{v = \operatorname{grad} f}$$

Man nennt f Stammfunktion von v und $U = -f$ Potentialfunktion (Potential) von v.

Bedeutung: In einem Kraftfeld v repräsentiert U das Potential der potentiellen Energie und $v = -\operatorname{grad} U$ zeigt in die Richtung des größten Energieabfalls.

<u>Bem.</u> Kommt vor in Newton's Energieerhaltungssatz (daher auch erhaltend = konservativ)

<u>Beispiel</u>

1. $v = \begin{pmatrix} y^2 z^3 \\ 2xyz^3 \\ 3xy^2z^2 \end{pmatrix}$ ist konservativ, denn mit

$f(x,y,z) = xy^2z^3$ gilt $\operatorname{grad} f = v$,

d.h. ist Stammfunktion von v, $-f$ ein Potential.

2. $v(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist ein Gradientenfeld, denn

mit $f(x,y,z) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ gilt $\operatorname{grad} f = v$.

f fällt hier noch vom Himmel, Bestimmung einer Stammfunktion später.

<u>Satz (Hauptsatz für Kurvenintegrale)</u>

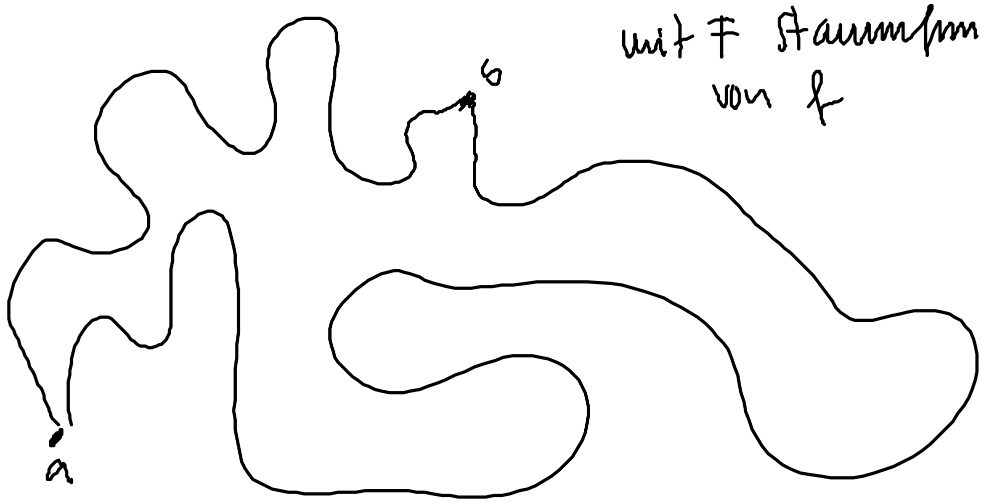
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $v \in C^0(G,\mathbb{R})$ ein Gradientenfeld mit Stammfunktion f (d.h. grad $f = v$). Dann gilt für jede stückweise glatte Kurve $K: x(t)$, $a \le t \le b$ in G:

zweimal stetig diff'bar

$$\boxed{\int_K v\cdot dx = f(x(b)) - f(x(a))}$$

Genau wie im Eindimensionalen, wo $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + F(a)$

mit F Stammfunktion von f



<u>Das heißt</u>

$\int_K v\cdot dx$ ist unabhängig von der Kurve K

(„Wegunabhängigkeit")

<u>speziell</u>

Falls K geschlossen ist, gilt $\oint v\cdot dx = 0$

<u>Interpretation</u>: Bewege Masse entlang eines Weges/Kurve, ggf. treppauf (Potentialgewinn) und treppab (Potentialverlust) und zurückgekehrt an den Ausgangspunkt ist das Potential (Höhe) wie zuvor, von außen betrachtet ist also „nichts passiert" (= keine Arbeit verrichtet worden).

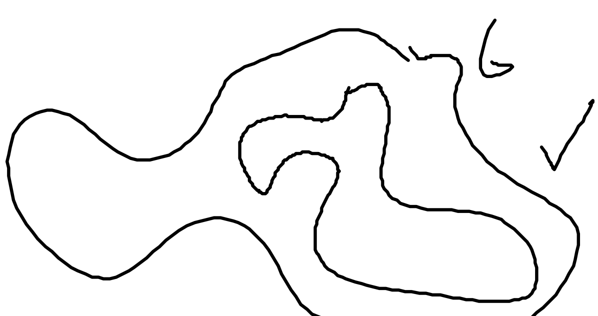
<u>Bemerkung</u>

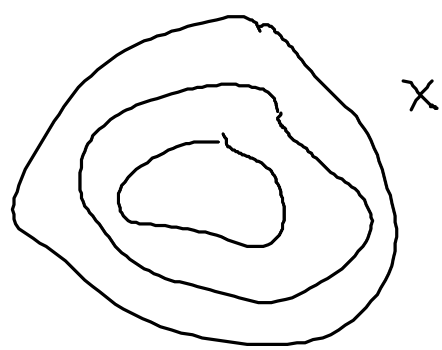
Zwei Stammfunktionen f_1 und f_2 eines Gradientenfeldes v unterscheiden sich höchstens um eine Konstante

$$v(x) = \operatorname{grad} f_1(x) = \operatorname{grad} f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) + \text{const}.$$

Ziel: <u>Test, ob ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist</u>
(d.h. ob eine Stammfunktion existiert)

Begriff: Ein Gebiet heißt <u>einfach zusammenhängend</u>, wenn jede geschlossene Kurve (kreuzungsfrei) auf einen Punkt zusammenziehen lässt





d.h. keine „Löcher im Gebiet".

<u>Satz (Integrabilitätsbedingung)</u>

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes, einfach zusammenhängendes Gebiet, $v \in \mathcal{C}^1(G,\mathbb{R})$ ein Vektorfeld. Dann ist v ein Gradientenfeld genau dann, wenn

$$J_v(x) = J_v(x)^T \quad \text{für alle } x \in G,$$

d.h. Funktionalmatrix ist symmetrisch

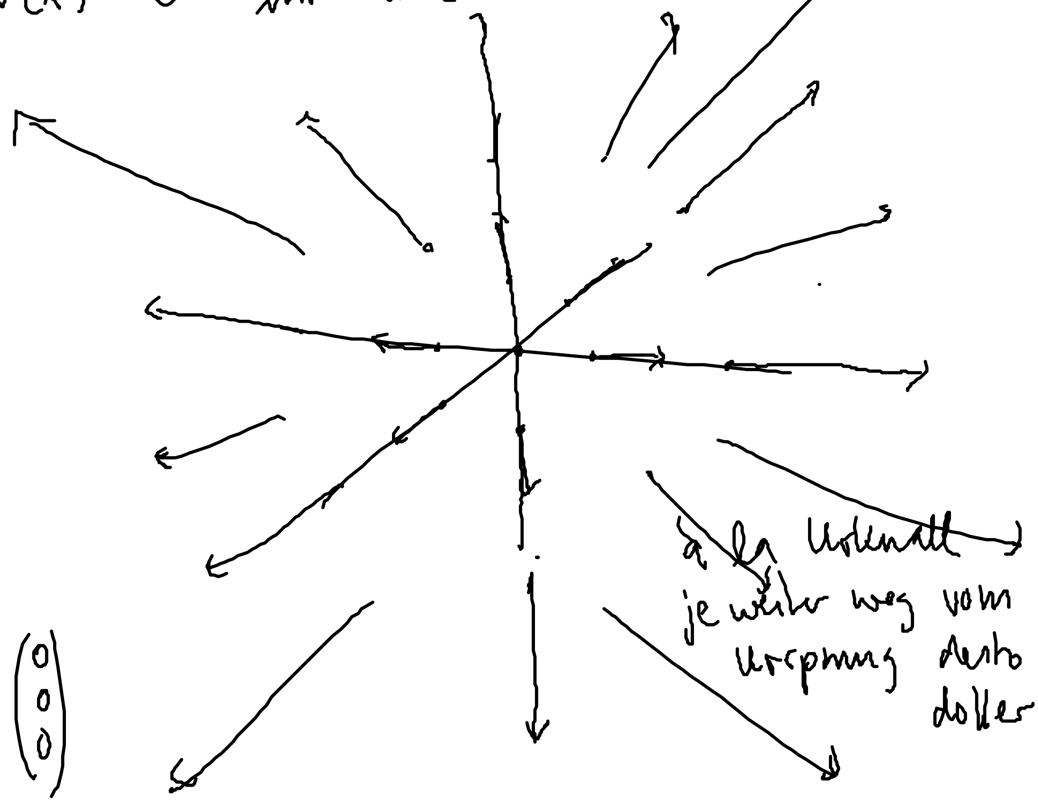
jetzt im Dreidimensionalen!

Korollar

Ein Vektorfeld $v \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn $\operatorname{rot} v(x) = 0$ für alle $x \in G$.

Beispiele

1. $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



$\Rightarrow \operatorname{rot} v(x) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. für v ex. Stammfunktion

$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ ist Stammfunktion von v

und $U(x,y,z) = -f(x,y,z)$ ist Potential von v.

2. $v = \begin{pmatrix} 2x \sin y \\ x^2 \cos y - \sin y \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2x\cos y = \frac{\partial v_2}{\partial x} \Rightarrow v \text{ ist Gradientenfeld}$$

weil Funktionalmatrix $J_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \boxed{\frac{\partial v_1}{\partial y}} \\ \boxed{\frac{\partial v_2}{\partial x}} & \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

ist symm. wenn $\square = \square$ ✓.

<u>Jetzt: Wie berechnet man eine Stammfunktion?</u>

Sei $f(x,y)$ Stammfunktion von v aus dem Beispiel eben

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\sin y \\ x^2\cos y - \sin y \end{pmatrix} = v \quad \text{nach Def.}$$

$$\underline{f(x,y)} = \underbrace{\int f_x \, dx}_{\text{mache Ableitung nach } x \text{ „rückgängig"}} + \underbrace{g(y)}_{\substack{\text{Konstante kann} \\ \text{von } y \text{ abhängen} \\ \text{(aber nicht von } x\text{!)}}}$$

$$= \int 2x\sin y \, dx + g(y) = \underbrace{x^2\sin y + g(y)}$$

$$f_y(x,y) = \underline{x^2 \cos y} - \sin y = \underline{x^2 \cos y} + g'(y)$$

$$\Rightarrow \quad g'(y) = -\sin y$$

$$\Rightarrow \quad g(y) = \cos y \ (+C)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x^2 \sin y + \cos y \ (+C)$$