Aktuelles Thema: Mehrdimensionale Integration

auf viele Arten interpretierbar

- E-Kreide von letzter Woche nachher online

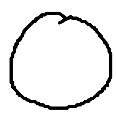
+ (angeblich) auch Mitschrift von Flo erhältlich

- z.B. mehrdim. Flächenberechnung

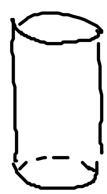
$$\iint_{\square} f(x,y)\,dx\,dy$$

- z.B. (letzte Woche) Integrale über „krumm“ berandete Gebiete

- Könnte man ausweiten, um „in anderen Koordinaten zu integrieren“, also z.B.



Polar-Koord.



Zylinderkoord.

letzte: „Umrechnungsformeln“ dazu

§4 Kurvenintegrale

- Verallgemeinerung bisher: „Summiere“ kleine Flächenstücke dF, $dx\,dy$, $dr\,d\varphi$

- Verallg. jetzt: Das Integrationsintervall $[a,b]$ dürfen wir jetzt „im Raum biegen“.

Zur Erinnerung:

Kurve im $\mathbb{R}^2$: $g:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ stetig

Länge einer Kurve:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}$$

$$= \int_a^b \underbrace{|g'(t)|}_{\text{Ableitung von } g \,\approx\, \text{Geschwindigkeit}} dt$$

= „summiere" kleine Strecken entlang der Kurve, je nach Geschwindigkeit.

Allgemein: Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition
Eine stetige Abbildung $x: I \to \mathbb{R}^n$ heißt

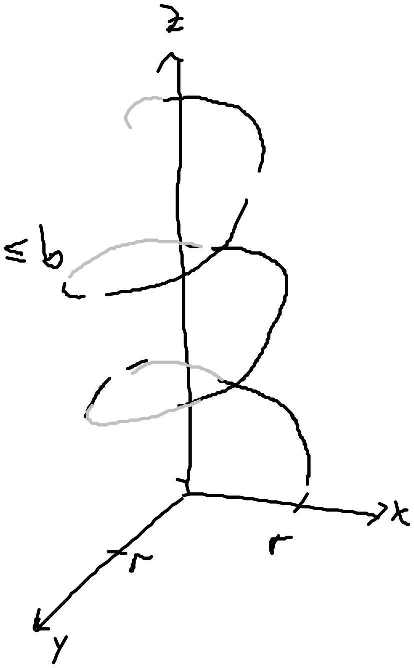
Intervall $[a,b]$

Kurve im $\mathbb{R}^n$. Ist x differenzierbar, ist

$$L = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt$$

Ableitung von x nach der Zeit t

die Länge der Kurve x.



Beispiel

Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$:
$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad a \le t \le b$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\underbrace{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}_{r^2 \cdot 1} + 1^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{r^2 + 1}\, dt$$

Definition

Sei K: $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve (d.h. $x(t)$ ist stetig diffbar und $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$)

a) Für $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (d.h. eine Funktion) heißt

$$\int_K g\, ds := \int_a^b g(t) \cdot |x'(t)|\, dt$$

das Kurvenintegral der Funktion g entlang der Kurve K.

b) Für ein Skalarenfeld $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ mit $x(t) \in D$ für alle $t \in [a,b]$, dann heißt

// d.h. eine Kurve im Def.bereich des Skalarenfeldes

b

$$\int_K f\,ds := \int_a^b \underbrace{f(x(t))}_{\text{das Skalarenfeld an jeder Stelle der Kurve „ausgewertet"}} \cdot |x'(t)|\,dt$$

das <u>Kurvenintegral des Skalarenfeldes f entlang der Kurve K</u>.

c) Ist $v: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ mit D offen ein stetiges Vektorfeld

// d.h. „an jedem Punkt im Raum klebt ein Vektor"

so heißt

$$\int_K v \cdot dx := \int_a^b v(x(t)) \cdot x'(t)\,dt$$

Skalarprodukt

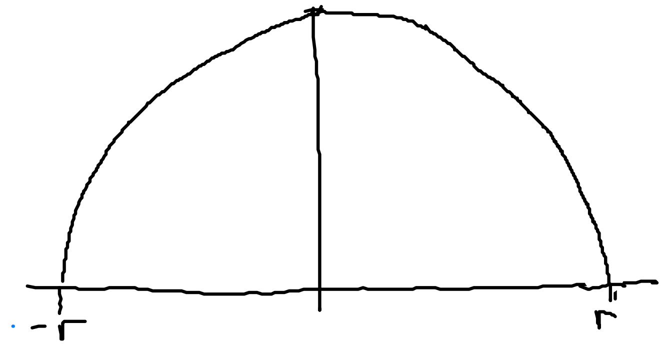
das <u>Kurvenintegral des Vektorfeldes entlang der Kurve K</u>.

<u>Bezeichnung</u>

- ds (aus a)) heißt das <u>Bogenelement</u> der Kurve
- anstelle von $\int_K v \cdot dx$ kann man das Skalarprodukt auch ausschreiben $\int_K v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \dots + v_n dx_n$

Beispiele

a) Masse eines Halbkreisbogens



Parametrisierung:

$$K: \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

$$t \in [0, \pi]$$

Dichte (z.B.!) $\quad \rho(t) = t(\pi - t)$ // Dichte hier quadratisch „zur Mitte zunehmend"

$$|x'(t)| = \left| \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r$$

$$\Rightarrow \text{Masse } M = \int_K \rho(t)\, ds = \int_0^\pi \rho(t)\, |x'(t)|\, dt = \int_0^\pi t(\pi - t)\, r\, dt$$

$$= r\left[-\frac{t^3}{3} + \frac{\pi t^2}{2} \right]_0^\pi = \pi^3 r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

b) Skalarenfeld $\quad f(x,y) = x + 2y$

Kurve K dieselbe wie oben (Halbkreisbogen)

Gegensatz zu eben: Funktion $g(t)$ war überhaupt nur entlang der Kurve definiert; jetzt ist $f(x,y)$ in jedem Punkt der Ebene definiert, wir wollen aber trotzdem nur entlang der Kurve „messen".

$$\int_K f\,ds = \int_0^\pi \underbrace{f(x_1(t), x_2(t))}_{\substack{f \text{ entlang der Kurve } K \\ \text{ausgewertet, d.h. für} \\ x \text{ und } y\text{, } x\text{- und } y\text{-Koord. der} \\ \text{Kurve eingesetzt}}} \cdot |x'(t)|\,dt$$

$$= \int_0^\pi (\underbrace{r\cos t}_{x} + \underbrace{2r\sin t}_{2y}) \cdot r \cdot dt$$

$$= r^2 \left[\sin t - 2\cos t \right]_0^\pi = r^2(2+2) = 4r^2$$

c) Vektorfeld $\quad v(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$, Kurve K wie oben $\frown$

$$\int_K v \cdot dx = \int_0^\pi \left[v_1(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t) + v_2(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_2'(t) \right] dt$$

sind beides Vektoren, d.h. $dx \approx \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$ s. Def.

$$= \int_0^\pi \left[(\underbrace{r^2\cos^2 t}_{x^2 = v_1})(\underbrace{-r\sin t}_{x_1'(t)}) \underbrace{- 2r^2\cos t \sin t}_{-2xy = v_2} \underbrace{(r\cos t)}_{x_2'(t)} \right] dt$$

$$= \ldots = -2r^3$$

Bem. ist ebenfalls eine Zahl, obwohl ein Vektorfeld integriert wird.

Anwendung

Die von einer Kraft f längs einer Kurve (d.h. eines Weges) K : $x(t)$, $a \le t \le b$ geleistete <u>Arbeit</u> ist

$$A = \int_K f \cdot dx$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Kurvenintegralen

$$\int_K f\, ds \qquad \text{bzw.} \qquad \int_K v \cdot dx$$

1. Parametrisierung der Kurve d.h. Übersetzung von „Halbkreisbogen" in $\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ oder allg. in

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad a \le t \le b$$

Hier geht normalerweise die Kreativität ein!

2. Der Rest ist eher „Routine", nämlich Berechnung des Bogenelements

$$ds = |x'(t)| \qquad \text{bzw.} \qquad dx = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

3. Ausrechnen:

$$\int_a^b f(x_1(t),\dots,x_n(t))\cdot\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2+\dots+(x_n'(t))^2}\;dt$$

bzw.

$$\int_a^b \left[v_1(x(t))\cdot x_1'(t)+\dots+v_n(x(t))\cdot x_n'(t)\right]dt.$$