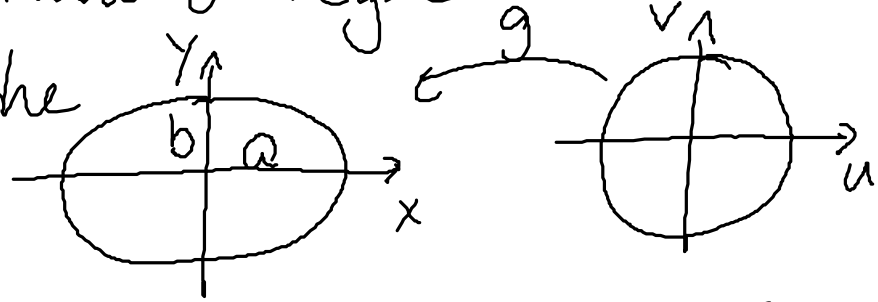
Gestern: Integration über 2-dim. Bereichen

Transformationsregel

Bsp: Ellipsenfläche



$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

$$K: u^2 + v^2 \le 1$$

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} a \cdot u \\ b\, v \end{pmatrix},$$

$$F(K) = \pi \cdot r^2 = \pi$$

$$|\det(J_g(u,v))| = \left|\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right| = a \cdot b$$

$$F(E) = \iint_E 1\, dx\, dy = \iint_K 1 \cdot |\det J_g(u,v)|\, du\, dv =$$

$$= \iint_K ab\, du\, dv = ab \iint_K 1\, du\, dv = a\, b\, \pi \quad //$$

<u>Heute</u>: Integration über 3-dim. Bereiche

Transformationsformel für $n = 3$

<u>Def</u>: Sei $\underline{I} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2, a_3 \le z \le b_3 \right\}$

$$= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$f: I \to \mathbb{R}$ stetig

$Z = \; a_1 = x_0 < \ldots < x_n = b_1$ eine Zerlegung von I

$\quad\;\; a_2 = y_0 < \ldots < y_m = b_2$

$\quad\;\; a_3 = z_0 < \ldots < z_p = b_3$

Konvergieren die Folgen Riemannscher Summen von f bzgl. Z_p

$$S_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(\underbrace{\xi_i, \eta_j, \mu_k}_{\in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

für beliebig kleine Zerlegungen von I und für bel. Zwischenstellen (ξ_i, η_j, μ_k) gegen einen Grenzwert S, so heißt <u>f auf I integrierbar</u> und S das bestimmte Integral von f auf I.

$$S = \iiint_I f \underbrace{dV}_{\text{Volumen-element}} = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

<u>Bsp.</u>: "Masse eines Quaders"

$Q = [0,2] \times [0,1] \times [1,2]$ mit Dichtefunktion

$$\rho(x,y,z) = x^2 y + z$$

$(V = \iiint_Q 1\,dV$ "Volumen"), Dichte $= \dfrac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$

$$M = \iiint_Q \rho\,dV$$

$$M = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^2 x^2 y + z\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{3}x^3 y + zx\right]_0^2\right) dy\,dz$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \left[\frac{8}{3}y + 2z\right) dy\,dz = \int_1^2 \left(\left[\frac{8}{6}y^2 + 2zy\right]_0^1\right) dz$$

$$= \int_1^2 \frac{4}{3} + 2z\,dz = \left[\frac{4}{3}z + z^2\right]_1^2 = \frac{4}{3}(2-1) + (2^2 - 1^2) = \frac{4}{3} + 3$$

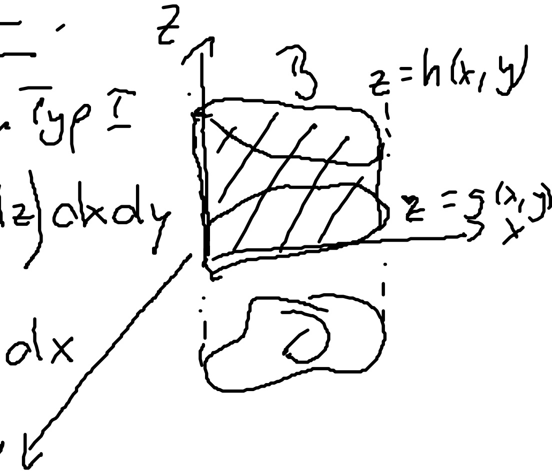
Integration über 3-dim. Normalbereiche

(falls Integrationsbereich kein Quader)

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich (vom Typ I oder II) in der x-y-Ebene, (d.h. $D = \{ \binom{x}{y} \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \}$) und $g(x,y)$ und $h(x,y)$ Funktionen auf D mit $g(x,y) \le h(x,y)$ für $(x,y) \in D$, so heißt

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \binom{x}{y} \in D,\ g(x,y) \le z \le h(x,y) \right\}$$

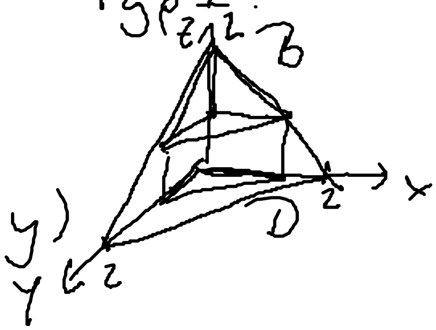
dreidim. <u>Normalbereich vom Typ I</u>.



<u>Satz</u>: Sei $f: B \to \mathbb{R}$, B Normalbereich vom Typ I

So gilt
$$\iiint_B f \, dV = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right) dx\,dy$$
$$= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) \, dz\, dy\, dx$$

$D = \{ \binom{x}{y} \mid a \le x \le b,\ u(x) \le y \le v(x) \}$ Normalbereich vom Typ I.



<u>Bsp</u>:
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 1,\ x+y+z \le 2 \right\}$$

$f(x,y,z) = x$

<u>ges.</u> $g(x,y)$, $h(x,y)$ mit $g(x,y) \le z \le h(x,y)$

$1 \le z \le 2 - x - y$

$1 \le 2 - x - y \Rightarrow x + y \le 1 \Rightarrow y \le 1 - x$

$\Rightarrow 0 \le y \le 1 - x$ $\qquad a = 0,\ b = 1$

$\Rightarrow 0 \le x \le 1$ $\qquad u(x) = 0,\ v(x) = 1 - x$

$\qquad g(x,y) = 1,\ h(x,y) = 2 - x - y$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \underbrace{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x}_{D},\ 1 \le z \le 2-x-y \right\}$$

$$\iiint f \, dV = \iint_D \left(\int^{2-x-y} x \, dz \right) dx\,dy = \int^{1} \int^{1-x} \int^{2-x-y} x \, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\left[zx \right]_1^{2-x-y} \right) dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2-x-y)\cdot x - x \; dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[xy - x^2 y - \frac{xy^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{1}{2} x (1 + x^2 - 2x)\, dx = \int_0^1 \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{6-8+3}{24} = \frac{1}{24}$$

Rechenregeln

1. Linearität: $\iiint_B (af + bg)\, dV = a \iiint_B f\, dV + b \cdot \iiint_B g\, dV$

2. Monotonie: $f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \Rightarrow \iiint_B f\, dV \leq \iiint_B g\, dV$

3. Additivität: $B = B_1 \dot\cup B_2$

$$\iiint_B f\, dV = \iiint_{B_1} f\, dV + \iiint_{B_2} f\, dV$$

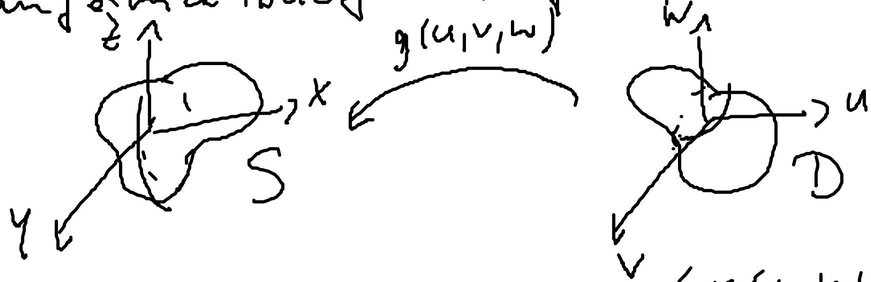
4. Vertauschbarkeit von Variablen / Satz von Fubini:

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$$\iiint_B f\, dV = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f\, dx\, dy\, dz = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy$$

$$= \dots$$

5) Transformationsformel für $n=3$



$$g: D \to S, \quad g(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$ Koordinaten-transformation stetig partiell diffbar

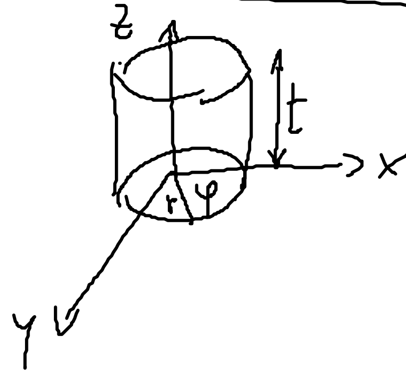
$f: S \to \mathbb{R}$ stetig

Dann ist

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_D f(g(u,v,w)) \cdot |\mathcal{J}_g(u,v,w)|\, d(u,v,w)}$$

Beispiele

1) Zylinderkoordinaten



$x = r\cos\varphi = x(r,\varphi,t)$

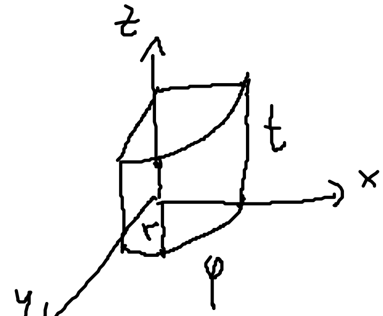
$y = r\sin\varphi = y(r,\varphi,t)$

$z = t = z(r,\varphi,t)$

$$g(r,\varphi,t) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi,t) \\ y(r,\varphi,t) \\ z(r,\varphi,t) \end{pmatrix}$$

$$|\mathcal{J}_g(r,\varphi,t)| = \left|\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$



$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 16,\ 0 \leq z \leq 10 \right\}$$

$$f(x,y,z) = \frac{z}{1+x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \iiint_B f \, d(x,y,z) = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{10} f(g(r,\varphi,t)) \cdot r \; dt \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{10} \frac{t}{1+r^2} \cdot r \; dt \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{t^2}{2(1+r^2)} r \right]_0^{10} d\varphi \, dr$$

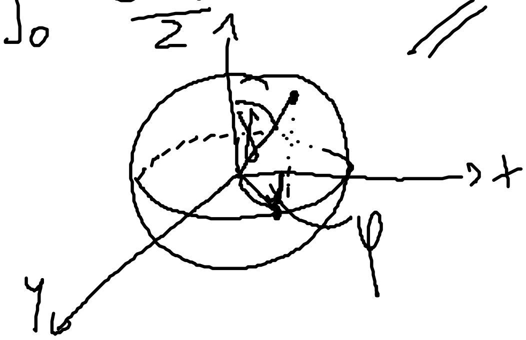
$$= \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{50r}{1+r^2} \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{50 r \varphi}{1+r^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^4 \frac{50 r \pi}{2(1+r^2)} \, dr$$

$$= 25\pi \int_0^4 \frac{r}{1+r^2} \, dr$$

$$= 25\pi \frac{1}{2} \ln(1+r^2) \Big]_0^4 = \frac{25\pi}{2} \cdot \ln(17)$$

2) Kugelkoordinaten



$$x = r \cos\varphi \cdot \sin\gamma = x(r,\varphi,\gamma)$$

$$y = r \sin\varphi \; \sin\gamma = y(r,\varphi,\gamma)$$

$$z = r \cos\gamma = z(r,\varphi,\gamma)$$

$$r \geq 0, \quad \varphi, \gamma \in [0, 2\pi]$$

$$g(r,\varphi,\gamma) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi,\gamma) \\ y(r,\varphi,\gamma) \\ z(r,\varphi,\gamma) \end{pmatrix}$$

$$|J_g(r,\varphi,\vartheta)| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta & -r\sin\varphi \sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix}\right|$$

$$= \left| r^2 \sin\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \end{vmatrix}\right|$$

$$= \ldots = |-r^2 \sin\vartheta| = r^2 \sin\vartheta$$

Anwendung

1) Volumen $V = \iiint_B 1 \, dV$

2) Masse $M = \iiint_B \rho(x,y,z) \, dV$

3) Schwerpunkt von B

$$x_s = \frac{1}{M} \iiint_B x \cdot \rho(x,y,z) \, dV$$

$$y_s = \frac{1}{M} \iiint_B y \, \rho(x,y,z) \, dV$$

$$z_s = \frac{1}{M} \iiint_B z \, \rho(x,y,z) \, dV$$