

Nächste Woche vertretet Katja und Hendrik die Vorlesung

§3 Vektorwertige Funktionen / Abbildungen

Wir betrachten Funktionen, die jedem $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ (Ortsvektor) einen Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^m$ zuordnen:

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

z.B. $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -yx \end{pmatrix}$ d.h. $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2$ $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -yx$
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Wir übertragen alles, was wir über reellwertige Funktionen wissen auf vektorwertige, indem wir die Komponentenfunktion $f_i(x)$ betrachten.

Definition Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$ / n Variablen rein, m Werte raus

$$x, x_0 \in D$$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) := \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}$$

b) f ist genau dann r -mal stetig partiell differenzierbar (oder auch: \mathcal{C}^r -Funktion), wenn alle $f_k, k=1, \dots, m$ stetig partiell diff'bar sind

c) f heißt total diff'bar (linear approximierbar), wenn es eine $m \times n$ -Matrix A gibt und eine Umgebung $U_r(x_0)$ von x_0 in D gibt, so dass für alle $x \in U_r(x_0)$

$$(*) \quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{A(x-x_0)}_{\text{lineare Abb.}} + o(|x-x_0|)$$

vgl. Tangentengleichung $f(x) = f(x_0) + \underbrace{a}_{f'(x_0)}(x-x_0) + \underbrace{o(|x-x_0|)}_{\text{Fehler 1. Ordnung}}$

(*) ist verallg. Tangentengleichung.

Aus c) folgt

$$f_k(x) = f_k(x_0) + (\text{grad } f_k(x_0))^T (x-x_0) + o(|x-x_0|)$$

d.h. die Matrix A enthält in den Zeilen die Gradienten der Komponentenfunktionen

Jacob. ist A eindeutig festgelegt und wird als Jacobi-Matrix bezeichnet, Schreibweise $J_f(x_0)$ (Funktionalmatrix).

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(x_0)^T \\ \text{grad } f_2(x_0)^T \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(x_0)^T \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \mid \dots \mid \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

zeilenweise Darstellung

spaltenweise partielle Ableitungen nach x_i

1) Polarkoordinaten

Die Funktion $f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ beschreibt

Umrechnung von Polar- nach kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Die Jacobi-Matrix dazu ist

$$J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial f_1}{\partial r}$ $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}$
 $\frac{\partial f_2}{\partial r}$ $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}$

„damit können wir in jedem Punkt die „Tangente“ anlegen“

Räumliche Skalare- bzw. Vektorfelder

Definition

Ein Skalarfeld (Belegungsfunktion) ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Ortsvektor $x \in D$ ein Skalar $f(x)$ zuordnet

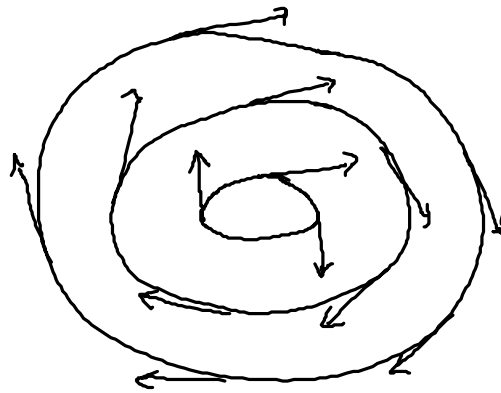
z.B. Temperaturverteilung der Luft.

Unter einem Vektorfeld versteht man eine Funktion $v: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt $x \in D$ einen Vektor $v(x)$ zuordnet

z.B. Stärke + Richtung der Luftströmung über einer Tragfläche.

Eine Kurve D heißt Feldlinie des Vektorfeldes v ; wenn der Vektor $v(x)$ in jedem Kurvenpunkt x parallel zur Tangente an die Kurve ist

„gibt Idee davon, wie das Vektorfeld aussieht“



Definition

Jedem C^1 -Skalarfeld $f: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ wird das Vektorfeld „Gradient“ zugeordnet

$$\text{grad } f: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ grad } f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix}$$

Jedem C^2 -Skalarfeld f wird das Skalarfeld Δf zugeordnet, mit dem Laplace-Operator

$$\Delta f: D \rightarrow \mathbb{R}, \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x)$$

Zu jedem C^1 -Vektorfeld $v: \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert man ein Skalarfeld „Divergenz“ $\operatorname{div} v$ und ein Vektorfeld „Rotation“ $\operatorname{rot} v$ durch:

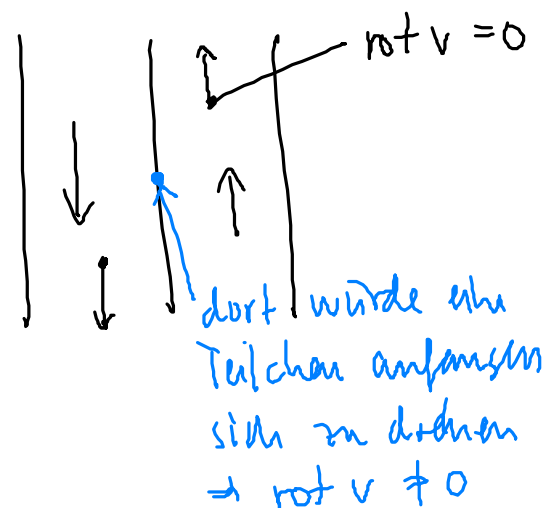
$$\operatorname{div} v: D \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{div} v(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\operatorname{rot} v: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \operatorname{rot} v(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Berechnungsschema
ähnlich Kreuzprodukt

Interpretation: Divergenz \sim „Quelldichte“

Rotation misst „Wirbelldichte“



Kapitel 8 Integration in mehreren Veränderlichen

§2 Integration über ebene Bereiche

Erinnerung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

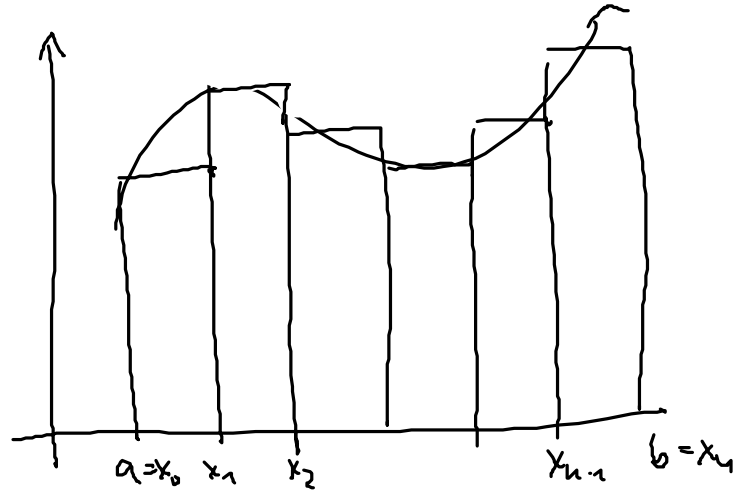
Annäherung der Fläche F
(unter der Kurve) über

Rechtecke:

$$F \approx \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Höhe}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{Breite}}$$

mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Verfeinerung →

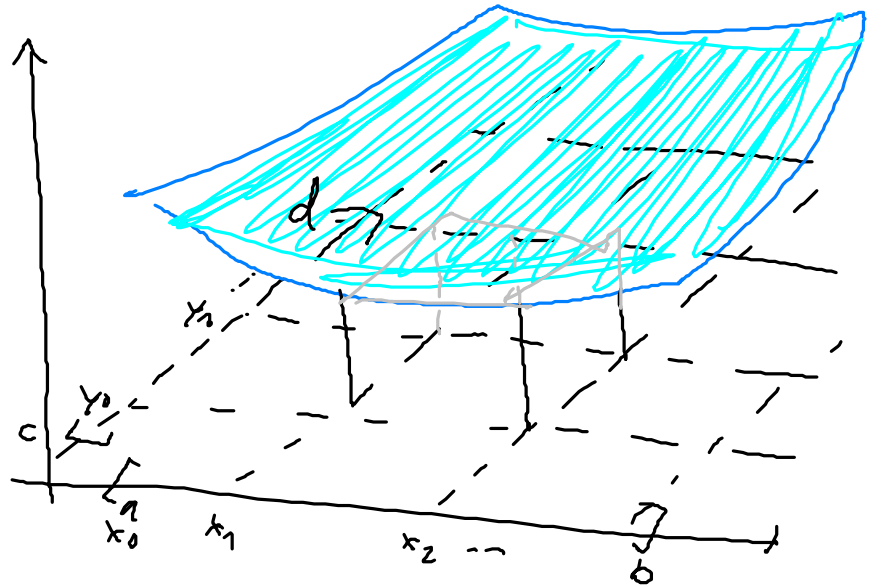


$$\int_a^b f(x) dx$$

Jetzt

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Annäherung des
Volumens (unter der
Fläche) über Quader



$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{f(\xi_i, \eta_j)}_{\text{Höhe}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{x\text{-Breite}} \underbrace{(y_i - y_{i-1})}_{y\text{-Breite}}$$

mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{i-1}, y_i]$

Verfeinerung →

Integral bezieht sich im \mathbb{R}^2

Die „Verfeinerung“ heißt

Riemannsche Summe von f
zur Zerlegung $Z =$
 $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m$

Wenn beliebige Verfeinerung immer einen (gemeinsamen) endlichen Wert liefert, dann heißt f integrierbar.

Der Grenzwert $S = \iint_I \underbrace{f(x,y)}_{\text{Höhe}} \underbrace{dF}_{\text{infinitesimale Grundfläche}}$

heißt das bestimmte Integral von f auf Intervall I

Berechnung von \iint

$$S = \iint_I f(x,y) dF = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

$I = [a,b] \times [c,d]$

Funktion in x Funktion in y

Beispiel

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2x$$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \right\}$$

$$= [0,3] \times [1,2]$$

$$\iint_I f(x,y) dF = \int_1^2 \int_0^3 (x^2 + 2y^2x) dx dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x^2 \right]_0^3 dy = \int_1^2 [9 + 9y^2] dy$$

$$= [9y + 3y^3]_1^2 = 18 + 24 - 9 - 3 = 30 //$$

Bemerkung Ist $f(x,y) \geq 0$, dann ist $\iint_{\bar{I}} f(x,y) dF$
das Volumen unter dem Graphen.

Man berechnet solche Mehrfachintegrale immer von innen nach außen.