Nächste Woche vertreten Katja und Hendrik die Vorlesung

§3 Vektorwertige Funktionen / Abbildungen

Wir betrachten Funktionen, die jedem $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ (Ortsvektor) einen Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^m$ zuordnen:

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

z.B. $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -yx \end{pmatrix}$ d.h. $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 \quad f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -yx$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Wir übertragen alles, was wir über reellwertige Funktionen wissen auf vektorwertige, indem wir die Komponentenfunktion $f_i(x)$ betrachten.

Definition Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ // n Variablen rein, m Werte raus

$x, x_0 \in D$

a) $$\lim_{x \to x_0} f(x) := \begin{pmatrix} \lim_{x \to x_0} f_1(x) \\ \vdots \\ \lim_{x \to x_0} f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}$$

b) f ist genau dann r-mal stetig partiell differenzierbar (oder auch: $\underline{\mathcal{C}^r\text{-Funktion}}$), wenn alle f_k, $k=1,\dots,m$ stetig partiell diff'bar sind

c) f heißt <u>total diff'bar</u> (<u>linear approximierbar</u>), wenn es eine $m \times n$-Matrix A gibt und eine Umgebung $U_r(x_0)$ von x_0 in D gibt, so dass für alle $x \in U_r(x_0)$

$$(*) \quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{A(x-x_0)}_{\text{lineare Abb.}} + o(|x-x_0|)$$

vgl. Tangentengleichung $f(x) = f(x_0) + \underset{f'(x_0)}{a}(x-x_0) + \underbrace{o(|x-x_0|)}_{\text{Fehler 1. Ordnung}}$

$(*)$ ist verallg. Tangentengleichung.

Aus c) folgt

$$f_k(x) = f_k(x) + (\operatorname{grad} f_k(x_0))^T (x-x_0) + o(|x-x_0|)$$

d.h. die Matrix A enthält in den Zeilen die Gradienten der Komponentenfunktionen

Insb. ist A ordentlich festgelegt und wird als <u>Jacobi-Matrix</u> bezeichnet, Schreibweise $J_f(x_0)$ (<u>Funktionalmatrix</u>).

$$J_f(x_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0)^T \\ \operatorname{grad} f_2(x_0)^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0)^T \end{pmatrix}}_{\text{zeilenweise Darstellung}} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)}_{\text{spaltenweise partielle Ableitungen nach } x_i}$$

1) Polarkoordinaten

Die Funktion $f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \overset{f_1}{r\cos\varphi} \\ \underset{f_2}{r\sin\varphi} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ beschreibt Umrechnung von Polar- nach kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Die Jacobi-Matrix dazu ist

$$J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \overset{\frac{\partial f_1}{\partial r}}{\cos\varphi} & \overset{\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}}{-r\sin\varphi} \\ \underset{\frac{\partial f_2}{\partial r}}{\sin\varphi} & \underset{\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}}{r\cos\varphi} \end{pmatrix}$$

„damit können wir in jedem Punkt die „Tangente“ anlegen“

<u>Räumliche Skalaren- bzw. Vektorenfelder</u>

<u>Definition</u>

Ein <u>Skalarenfeld</u> (<u>Belegungsfunktion</u>) ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}$, die jedem Ortsvektor $\underline{x} \in D$ ein Skalar $f(x)$ zuordnet

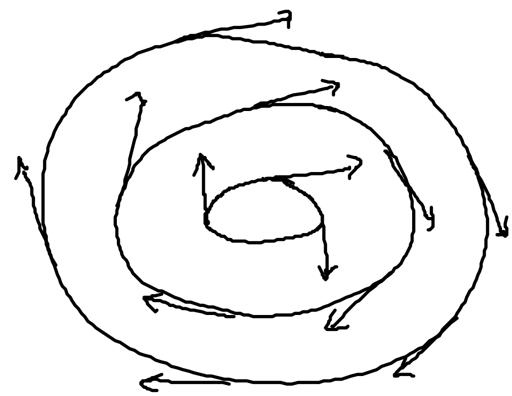
z.B. Temperaturverteilung der Luft.

Unter einem Vektorfeld versteht man eine Funktion $v: \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt $x \in D$ einen Vektor $v(x)$ zuordnet

z.B. Stärke + Richtung der Luftströmung über einer Tragfläche.

Eine Kurve D heißt Feldlinie des Vektorfeldes v, wenn der Vektor $v(x)$ in jedem Kurvenpunkt x parallel zur Tangente an die Kurve ist

"gibt Idee davon, wie das Vektor „aussieht"



Definition

Jedem $\mathcal{C}^1$-Skalarenfeld $f: \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}$ wird das Vektorfeld „Gradient" zugeordnet

$$\operatorname{grad} f: D \to \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix}$$

Jedem $\mathcal{C}^2$-Skalenfeld f wird das Skalarenfeld Δf zugeordnet, mit dem Laplace-Operator

$$\Delta f: D \to \mathbb{R}, \quad \Delta f: \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x)$$

Zu jedem C^1-Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ definiert man ein Skalarenfeld „Divergenz" $\operatorname{div} v$ und ein Vektorfeld „Rotation" $\operatorname{rot} v$ durch:

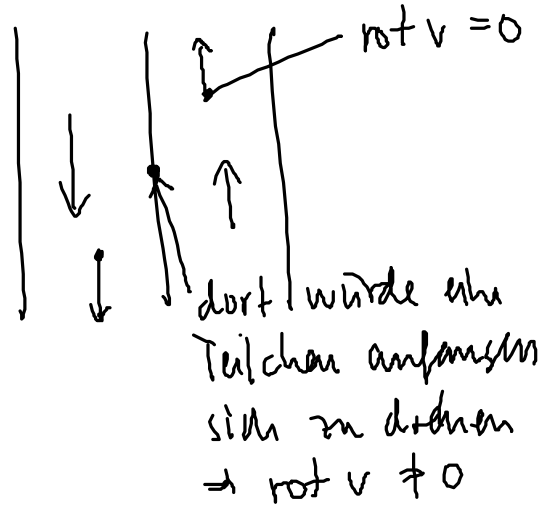
$$\boxed{\operatorname{div} v : D \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{div}(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} v : D \to \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} v(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}}.$$

Berechnungsschema ähnlich Kreuzprodukt

Interpretation: Divergenz ~ „Quelldichte"

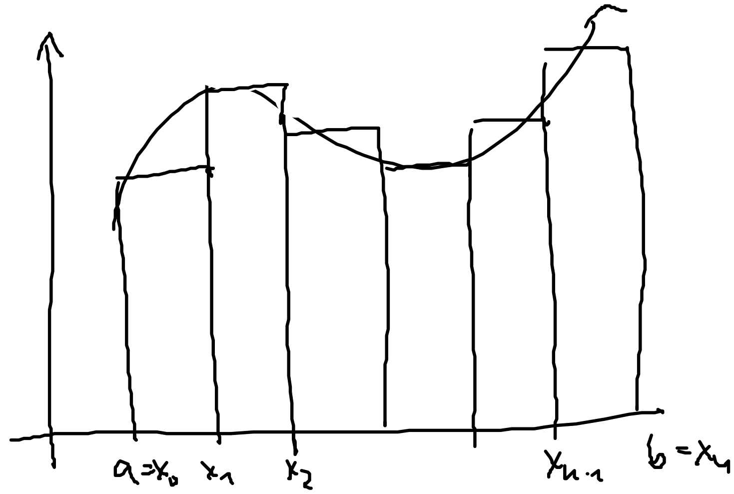
Rotation misst „Wirbeldichte"



Kapitel 8 Integration in mehreren Veränderlichen

§2 Integration über ebene Bereiche

Erinnerung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Annäherung der Fläche F (unter der Kurve) über Rechtecke:

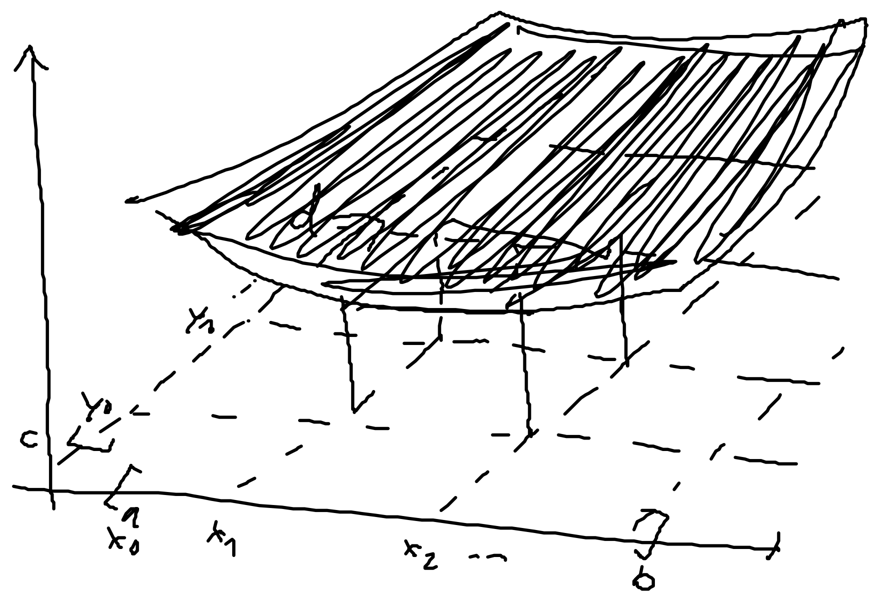
$$F \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi)}_{\text{Höhe}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{Breite}}$$

mit $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$

$\xrightarrow{\text{Verfeinerung}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

<u>Jetzt</u>

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Annäherung des Volumens (unter der Fläche) über Quader

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{f(\xi_i, \xi_j)}_{\text{Höhe}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{x\text{-Breite}} \underbrace{(y_i - y_{i-1})}_{y\text{-Breite}}$$

mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\xi_j \in [y_{i-1}, y_i]$

$\xrightarrow{\text{Verfeinerung}}$ Integralbegriff im $\mathbb{R}^2$

Die „Verfeinerung" heißt <u>Riemannsche Summe</u> von f zur Zerlegung $Z = x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m$

Wenn beliebige Verfeinerung immer einen (gemeinsamen) endlichen Wert liefert, dann heißt f <u>integrierbar</u>.

Der Grenzwert $\quad S = \iint\limits_I \underbrace{f(x,y)}_{\text{Höhe}} \underbrace{dF}_{\text{infinitesimale Grundfläche}}$

heißt das <u>bestimmte Integral von f auf Intervalle I</u>

<u>Berechnung</u> von $\iint$

$$S = \iint\limits_I f(x,y)\,dF = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)}_{\text{Funktion in } x} dx = \int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)}_{\text{Funktion in } y} dy$$

$I = [a,b] \times [c,d]$

<u>Beispiel</u>

$f(x,y) = x^2 + 2y^2x$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2 \right\} = [0,3] \times [1,2]$$

$$\iint\limits_I f(x,y)\,dF = \int_1^2 \int_0^3 (x^2 + 2y^2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2x^2 \right]_0^3 dy = \int_1^2 \left[9 + 9y^2 \right] dy$$

$$= \left[9y + 3y^3 \right]_1^2 = 18 + 24 - 9 - 3 = 30$$

Bemerkung Ist $f(x,y) \geq 0$, dann ist $\iint_I f(x,y)\,dF$ das Volumen unter dem Graphen.

Man berechnet solche Mehrfachintegrale immer von innen nach außen.