

Ich träre dann gerne aufpassen!

Letztes Mal: Extremwertaufgaben
(Finde Maximal- und Minimalstellen)

→ etwas an der Realität vorbei, weil normalerweise entscheidende
Konditionen Bedingungen vorliegen (Budget, Maximalverträge, ...)

→ Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen

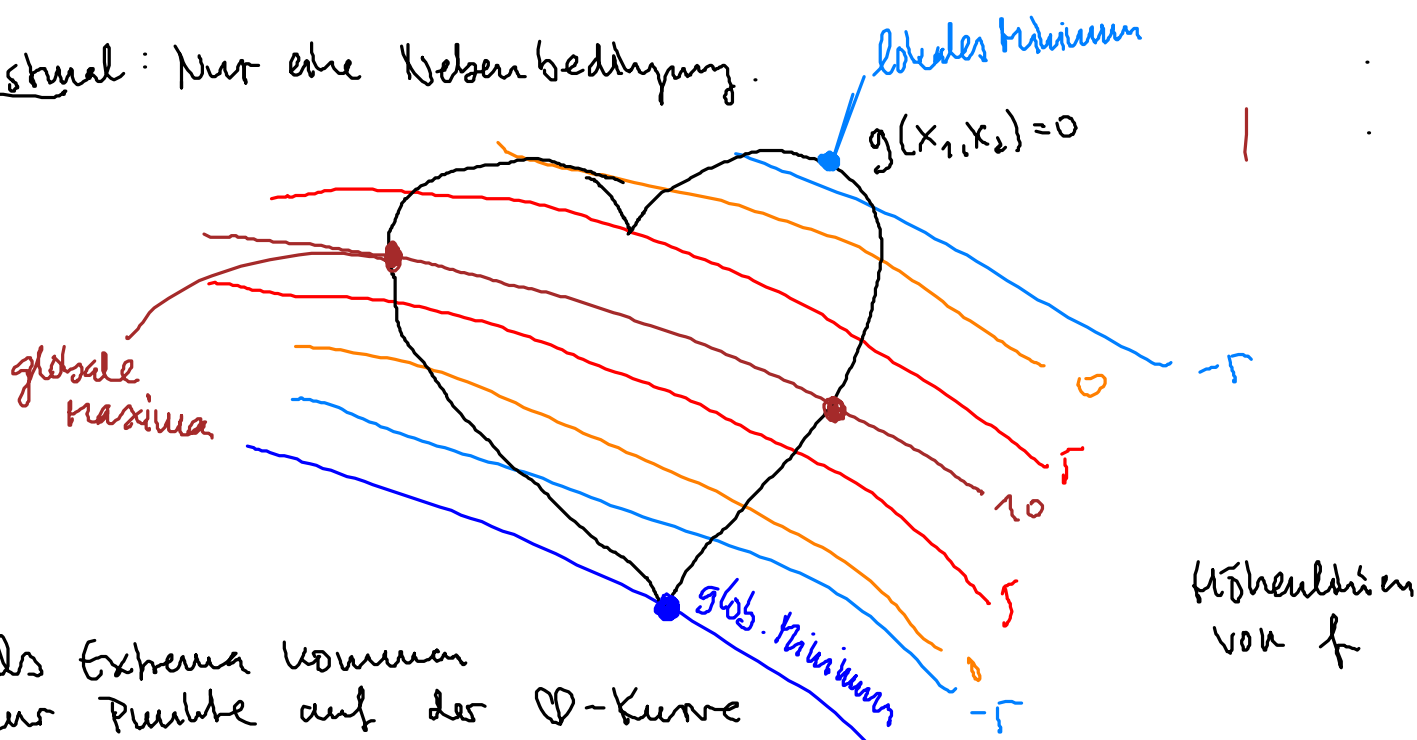
Bei der Bestimmung von Extrema einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$
hat man häufig zusätzliche Nebenbedingungen, formal:

$$\begin{aligned} \text{min (bzw. max)} \quad & f(x) \\ & g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ & \vdots \\ & g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

wobei $g_i: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$.

Ziel: Methoden, um solche Aufgaben
zu lösen.

Erstmal: Nur eine Nebenbedingung.



als Extrema kommen
nur Punkte auf der \heartsuit -Kurve

In Frage.

-10

1. Methode (explizite Methode)

Man löst, falls möglich, $g(x_1, \dots, x_n)$ nach einer Variablen auf und setzt diese in f ein.

Danach hat man ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung \rightarrow s. letztes Mal

Beispiel

min $\underbrace{x^2 + y^2}$ „Zielfunktion“

Nebenbedingung: $2x - y = 1$ / $g(x, y) = 2x - y - 1 = 0$

\Rightarrow z.B. $y = 2x - 1$ $\xrightarrow[\text{in } f]{\text{einsetzen}}$ $f(x) = x^2 + (2x - 1)^2$

min $f(x) \Leftrightarrow$ min $x^2 + (2x - 1)^2 = 5x^2 - 4x + 1$

$\Rightarrow x = \frac{2}{5}$ $\xrightarrow[\text{einsetzen}]{\text{zurück}}$ $y = 2 \cdot \frac{2}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$

ist Minimum.

\rightarrow klappt fast wie

2. Methode (Parametrisierung der Nebenbedingung)

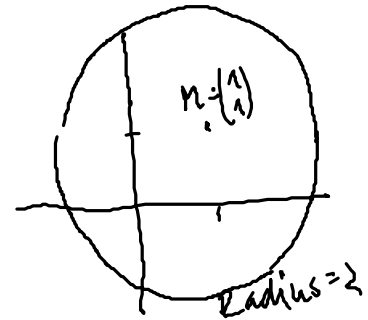
Problem: z.B. Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ // Einheitskreis
nicht nach x oder y auflösbar

Aber: Kurve (wie der Kreis hier) ist manchmal parametrisierbar, dann löst man nach dem Parameter auf und setzt in f ein. Ergibt wieder ein „Unkonditioniertes“ Problem (d.h. eines ohne Nebenbedingungen)

Beispiel

$$\text{Min } \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Nebenbed. $\underbrace{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0}_{g(x,y)=0}$



Parametrisierung (Polarkoord.) $x(\varphi) = 1 + 2\cos\varphi$
 $y(\varphi) = 1 + 2\sin\varphi$

$\Rightarrow f(\varphi) = f(x(\varphi), y(\varphi)) = \frac{1}{2}((1+2\cos\varphi)^2 + (1+2\sin\varphi)^2)$
 // Zielfunktion in einer Variablen, hier ist Nebenbedingung bereits eingesetzt!

dann „wie gehabt“:

$$f(x) = \dots = 3 + 2(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$f'(x) = -2\sin\varphi + 2\cos\varphi \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{// Suche stationäre Punkte}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

Typ d. Extremums?

$$f''(x) = -2\cos\varphi - 2\sin\varphi$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

3. Methode (Lagrange-Ansatz, Lagrange-Multiplikatorregel)

Intuitiv: Entferne Nebenbedingung und „beraube“ die „Verletzung“ der Nebenbedingung in der Zielfunktion

1. Schritt Führe neue Funktion ein

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

wenn ich $L(x, \lambda)$ minimiere
an Stelle von f

„wird klein“

überall wo $g(x) = 0$,
fällt dieser Term weg,
man erhält originales
 $f(x)$, überall anders,
d.h. für $g(x) \neq 0$, d.h.
Nebenbedingung nicht
erfüllt, kommt $\lambda \cdot g(x)$
 („Strafe mal Verletzung“)
dazu

Dieses $L(x, \lambda)$ wird jetzt ohne weitere Neben-
bedingungen minimiert

2. Schritt

dazu: bestimme stationäre Punkte von L durch Lösen des
folgenden (im Allg. nicht-linear) Gleichungssystems

$$\text{grad } L(x, \lambda) = 0 \quad ;$$

$$L_{x_1} = f_{x_1}(x_1, \dots, x_n) + \lambda g_{x_1}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$L_{x_n} = f_{x_n}(x_1, \dots, x_n) + \lambda g_{x_n}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{!}{=} 0$$

$$L_{\lambda} = g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Die Lösungen $(x_1^1, \dots, x_n^1), (x_1^2, \dots, x_n^2), \dots$ sind Kandidaten
für Extremalstellen von f
(die erfüllen wegen $L_{\lambda} = 0 = g(x_1, \dots, x_n) = 0$ die Nebenbedingungen)

3. Schritt

Ob die Kandidaten wirklich Extrema sind, ist im Allg. schwierig zu beurteilen, das ergibt sich häufig aus "physikalischen" Gründen (erfordert aber offenbar einige Erfahrung!)

Satz

Sei $f, g \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ // (stetig) diff'bar, z.B. nicht 

$D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$. ist

Lösung ist min (bzw. max) $f(x)$
 $g(x) = 0$

mit $\text{grad } g(a) \neq 0$. Dann gibt es ("Lagrange-Multiplikatoren") $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

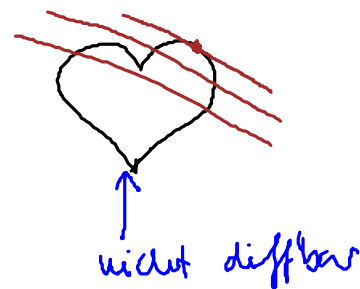
$$\boxed{\text{grad } f(a) + \lambda \text{ grad } g(a) = 0}$$

Soll heißen: Obiges Vorgehen funktioniert!

Geometrische Deutung der Gleichung: in Extremalstelle sind $\text{grad } f$ und $\text{grad } g$ parallel

Interpretation: Niveaulinie von f und Nebenbedingung berühren sich in Extrempunkt.

Gesondert zu untersuchen: nicht-diffbare Stellen von f oder g



Beispiel

min $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

Nebenbed: $(x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$

1. Schritt Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}_{f(x, y)} + \lambda \underbrace{((x-1)^2 + (y-1)^2 - 4)}_{\lambda g(x, y)}$$

2. Schritt Gradient nullsetzen:

$$L_x = x + 2\lambda(x-1) \stackrel{!}{=} 0 \quad | \cdot (y-1)$$

$$L_y = y + 2\lambda(y-1) \stackrel{!}{=} 0 \quad | \cdot (x-1)$$

$$L_\lambda = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0$$

↑ "Trickelente",
"soll 'Ähnlichkeit' von
 L_x, L_y
ausnutzen

Lösen dieses Gleichungssystems i.A. schwierig!

$$x(y-1) + \cancel{2\lambda(x-1)(y-1)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$y(x-1) + \cancel{2\lambda(y-1)(x-1)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x(y-1) = y(x-1) \quad \Rightarrow x = y$$

↓ alles relativ
schwierig
zu argumentieren

in $L_\lambda = 0$ einsetzen:

$$(x-1)^2 + (x-1)^2 - 4 = 0 \quad | :2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2} = y_{1/2}$$

Bem. λ wird nicht weiter gebraucht

weitere Rechenerei ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ist Maximalstelle}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ ist Minimalstelle.}$$

Es ist nicht unbedingt davon auszugehen, dass Ihr genügend Erfahrung sammelt um solche Optimierungsaufgaben in aller Allgemeinheit zu lösen. Dennoch treten sie in der Praxis an allen Ecken und Enden auf.

→ Sucht den Kontakt zu Mathematikern.