Ich täte dann gerne anfangen!

Letztes Mal: Extremwertaufgaben
(Finde Maximal- und Minimalstellen)

→ etwas an der Realität vorbei, weil normalerweise einschränkende Bedingungen vorliegen (Budget, Maximalkräfte, ...)

→ <u>Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen</u>

Bei der Bestimmung von Extrema einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ hat man häufig zusätzliche Nebenbedingungen, formal:

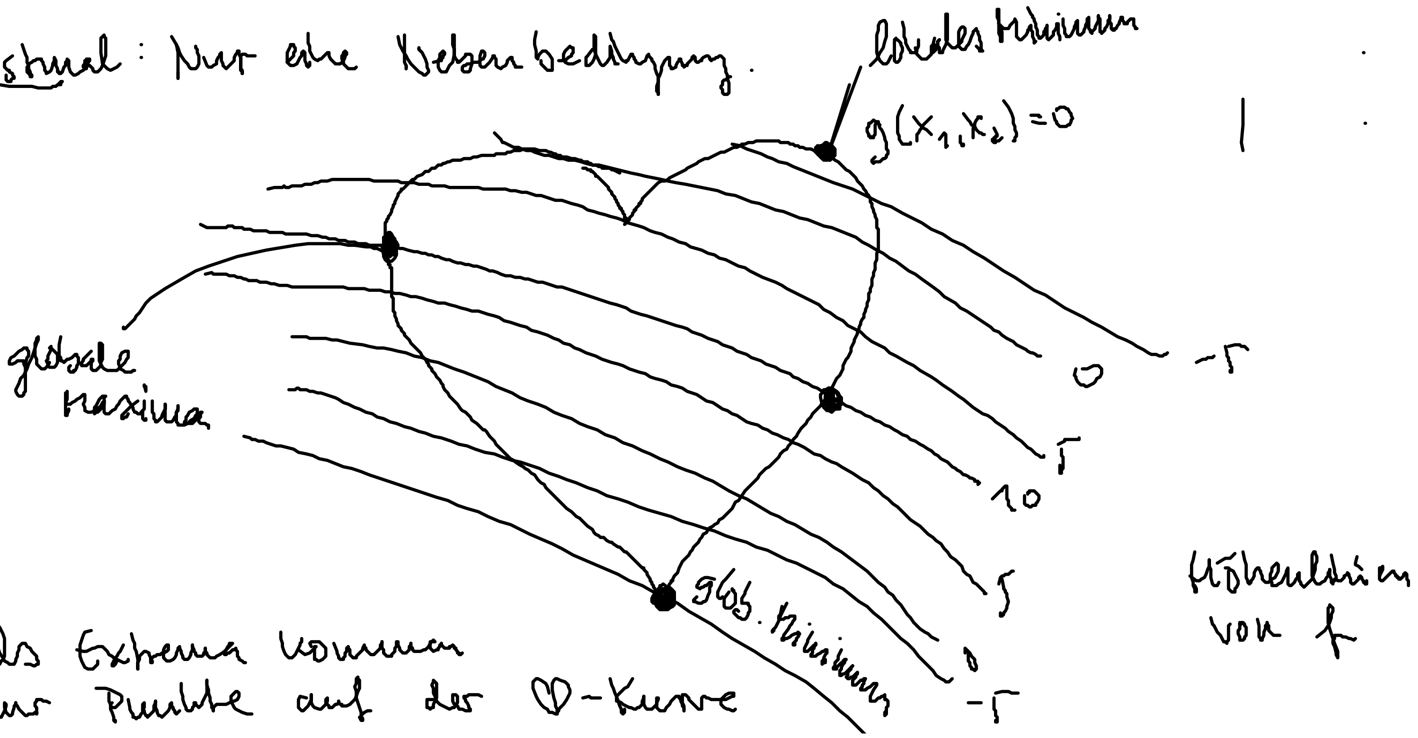
$$\min \text{ (bzw. max) } f(x)$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

wobei $g_i : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Ziel: Methoden, um solche Aufgaben zu lösen.

<u>Erstmal</u>: Nur eine Nebenbedingung.



als Extrema kommen nur Punkte auf der ♡-Kurve in Frage.

$\quad - 10$

1. Methode (explizite Methode)

Man löst, falls möglich, $g(x_1, \dots, x_n)$ nach einer Variablen auf und setzt diese in f ein.
Danach hat man ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung → s. letztes Mal

Beispiel

$$\min \underbrace{x^2 + y^2}_{f} \qquad \text{„Zielfunktion"}$$

Nebenbedingung: $2x - y = 1 \quad // \; g(x,y) = 2x - y - 1 = 0$

$$\Rightarrow \text{z.B. } y = 2x - 1 \xrightarrow[\text{in } f]{\text{einsetzen}} f(x) = x^2 + (2x-1)^2$$

$$\min f(x) \Leftrightarrow \min x^2 + (2x-1)^2 = 5x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \xRightarrow[\text{einsetzen}]{\text{zurück-}} y = 2 \cdot \frac{2}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$$

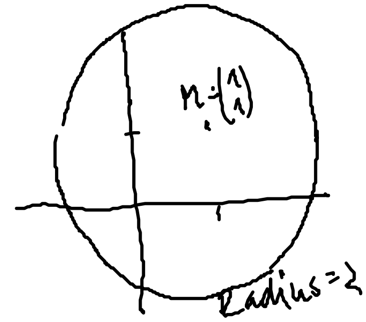
ist Minimum.

→ klappt fast nie

2. Methode (Parametrisierung der Nebenbedingung)

Problem: z.B. Nebenbeding. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ // Einheitskreis
nicht nach x oder y auflösbar

Aber: Kurve (wie der Kreis hier) ist manchmal parametrisierbar, dann löst man nach dem Parameter auf und setzt in f ein. Ergibt wieder ein „unrestringiertes" Problem (d.h. eines ohne Nebenbedingungen)



<u>Beispiel</u> $\min \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

Nebenbed. $\underbrace{(x-1)^2+(y-1)^2-4=0}_{g(x,y)=0}$

Parametrisierung (Polarkoord.) $x(\varphi) = 1+2\cos\varphi$

$y(\varphi) = 1+2\sin\varphi$

$$\Rightarrow f(\varphi) = f(x(\varphi), y(\varphi)) = \frac{1}{2}\left((1+2\cos\varphi)^2 + (1+2\sin\varphi)^2\right)$$

// Zielfunktion in <u>einer</u> Variablen, hier ist Nebenbedingung bereits eingesetzt!

dann „wie gehabt":

$$f(x) = \ldots = 3+2(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$f'(x) = -2\sin\varphi + 2\cos\varphi \overset{!}{=} 0$$ // suche stationäre Punkte

$$\Rightarrow \sin\varphi = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

Typ d. Extremums?

$$f''(x) = -2\cos\varphi - 2\sin\varphi$$

$f''(\frac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f''(\frac{5\pi}{4}) > 0 \Rightarrow$ Minimum.

3. Methode (Lagrange-Ansatz, Lagrange-Multiplikatorregel)

Intuitiv: Entferne Nebenbedingung und „bestrafe" die „Verletzung" der Nebenbedingung in der Zielfunktion

1. Schritt Führe neue Funktion ein

$$\boxed{L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)}$$

wenn ich $L(x,\lambda)$ minimiere an Stelle von f

„wird klein"

überall wo $g(x)=0$, fällt dieser Term weg, man erhält originales $f(x)$, überall anders, d.h. für $g(x)\neq 0$, d.h. Nebenbedingung nicht erfüllt, kommt $\lambda \cdot g(x)$ („Strafe mal Verletzung") dazu

Dieses $L(x,\lambda)$ wird jetzt ohne weitere Nebenbedingungen minimiert

2. Schritt

dazu: bestimme stationäre Punkte von L durch Lösen des folgenden (im Allg. nicht-linearen) Gleichungssystems $\operatorname{grad} L(x,\lambda)=0$:

$$
\begin{aligned}
L_{x_1} &= f_{x_1}(x_1,\dots,x_n) + \lambda g_{x_1}(x_1,\dots,x_n) \overset{!}{=} 0\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
L_{x_n} &= f_{x_n}(x_1,\dots,x_n) + \lambda g_{x_n}(x_1,\dots,x_n) \overset{!}{=} 0\\
L_\lambda &= g(x_1,\dots,x_n) = 0
\end{aligned}
$$

Die Lösungen $(x_1^1,\dots,x_n^1),(x_1^2,\dots,x_n^2),\dots$ sind Kandidaten für Extremalstellen von f

(die erfüllen wegen $L_\lambda=0 = g(x_1,\dots,x_n)=0$ die Nebenbedingungen)

3. Schritt

Ob die Kandidaten wirklich Extrema sind, ist im Allg. schwierig zu beurteilen, das ergibt sich häufig aus „physikalischen" Gründen
(erfordert aber offenbar einige Erfahrung!)

Satz

Sei $f, g \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ // stetig diff'bar, z.B. nicht ♡
$D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$. ist
Lösung ist min (bzw. max) $f(x)$
$$g(x) = 0$$

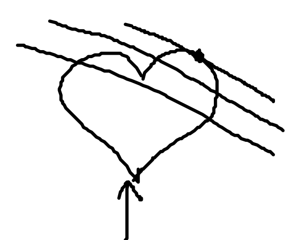
mit $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$. Dann gibt es („weiche Strafe") $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\boxed{\operatorname{grad} f(a) + \lambda \operatorname{grad} g(a) = 0}$$

Soll heißen: Obiges Vorgehen funktioniert!

Geometrische Deutung der Gleichung: in Extremalstelle sind grad f und grad g parallel
Interpretation: Niveaulinie von f und Nebenbedingung berühren sich in Extremalpunkt.

Gesondert zu untersuchen: nicht-diffbare Stellen von f oder g



nicht diff'bar

Beispiel

$$\min \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Nebenbed: $(x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$

1. Schritt Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda)$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)}_{f(x,y)} + \underbrace{\lambda\left((x-1)^2+(y-1)^2-4\right)}_{\lambda g(x,y)}$$

2. Schritt Gradient nullsetzen:

$$L_x = x + 2\lambda(x-1) \overset{!}{=} 0 \quad | \cdot (y-1)$$
$$L_y = y + 2\lambda(y-1) \overset{!}{=} 0 \quad | \cdot (x-1)$$
$$L_\lambda = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4 \overset{!}{=} 0$$

„Trickkiste", soll „Ähnlichkeit" von L_x, L_y ausnutzen

Lösen dieses Gleichungssystems i.A. schwierig!

$$x(y-1) + \cancel{2\lambda(x-1)(y-1)} \overset{!}{=} 0$$
$$y(x-1) + \cancel{2\lambda(y-1)(x-1)} \overset{!}{=} 0.$$

$$\Rightarrow x(y-1) = y(x-1) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

/ alles relativ schwierig zu argumentieren

in $L_\lambda = 0$ einsetzen:

$$(x-1)^2 + (x-1)^2 - 4 = 0 \quad | :2$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2} = y_{1/2}$$

Bem. λ wird nicht weiter gebraucht

„Weitere Rechnerei" ergibt

$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ist Maximalstelle

$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ist Minimalstelle.

Es ist nicht unbedingt davon auszugehen, dass Ihr genügend Erfahrung sammelt um solche Optimierungsaufgaben in aller Allgemeinheit zu lösen. Dennoch treten sie in der Praxis an allen Ecken und Enden auf.

→ Sucht den Kontakt zu Mathematikern.