

Wahlen, Neuigkeiten → mitgehen

• es ist übrigens BILDUNGSSTREIK → schlammaden

• und jetzt ist Vorlesung → mitmachen

• International Day → 10.6. 900 Euro 5

gestern: Richtungsableitung

→ gibt „Tangentensteigung“ in Richtung v in einem Punkt x

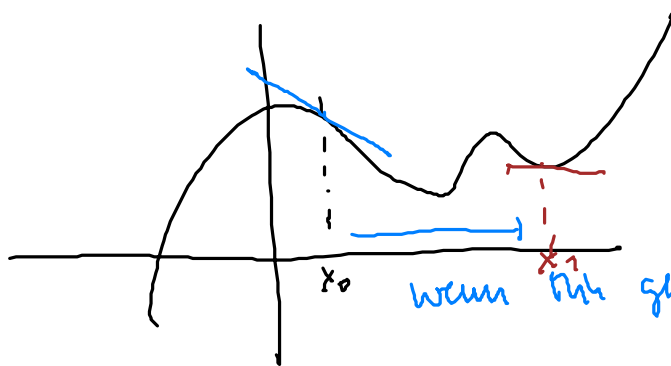
$$\partial_v f(x) = (\text{grad } f(x))^T \cdot v$$

insb. zeigt Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs.

Anwendung

Das Gradientenverfahren zur Bestimmung eines Maximums (bzw. Minimums) einer Funktion

Prinzip in \mathbb{R}^1



wenn Min gesucht „gehe nach rechts“

Startwert x_0

$$\text{setze } x_1 = x_0 + h \cdot \text{grad } f(x_0)$$



mit einer zu wählenden Schrittweite h

Ist $f(x_1) > f(x_0)$
 fahre fort mit x_1
 wie oben

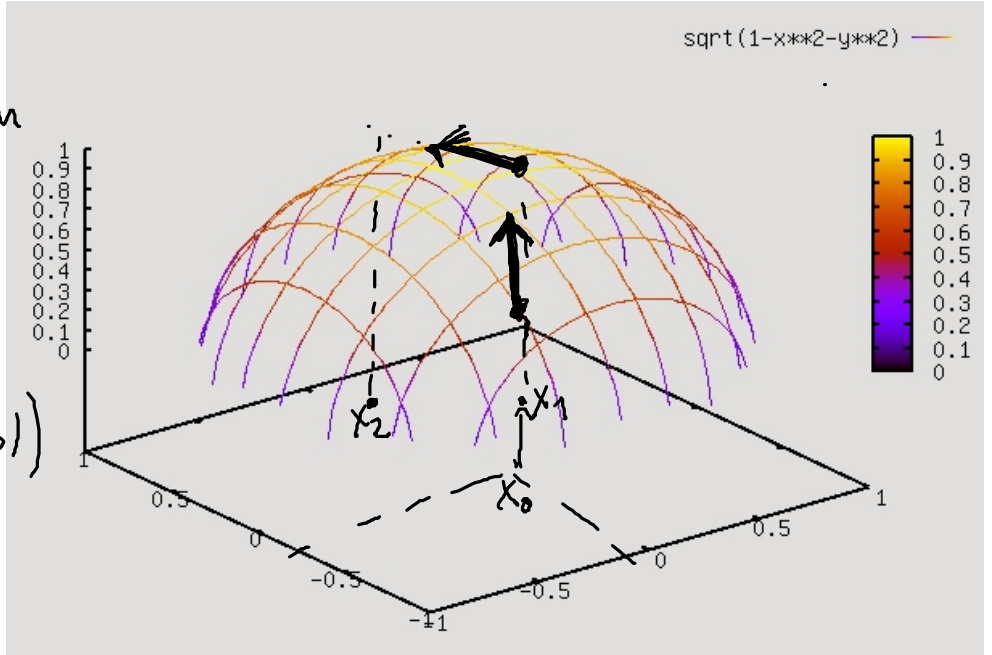
ansonsten ($f(x_1) < f(x_0)$)

wähle h kleiner
 (z.B. $\frac{h}{2}$) und
 versuche es erneut

Abbruch, wenn $\text{grad } f(x)$ nahe am Nullvektor.

Beachte: So kann man nur lokale Extrema finden.

Analog: Minimum finden, indem in Richtung $-\text{grad } f(x)$ gegangen wird.



2. Approximation höherer Ordnung

Zur Erinnerung: Für $f: \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ gilt

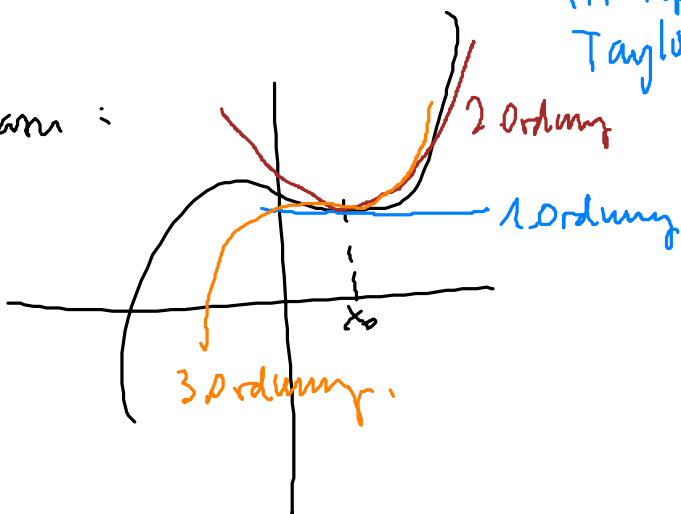
Taylor-Formel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)}_{\text{Tangente}} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_{n+1}(x, x_0)$$

mit Restglied $R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$
 mit $\xi \in [x, x_0]$

Wenn das Wert genug, dann ist Approximation von f durch Taylor "gut genug".

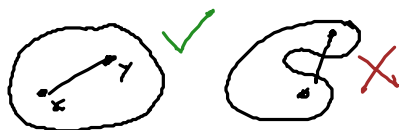
Bild dazu:



Für Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sieht die Taylor-Formel so aus!

Satz (Taylor-Formel)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex

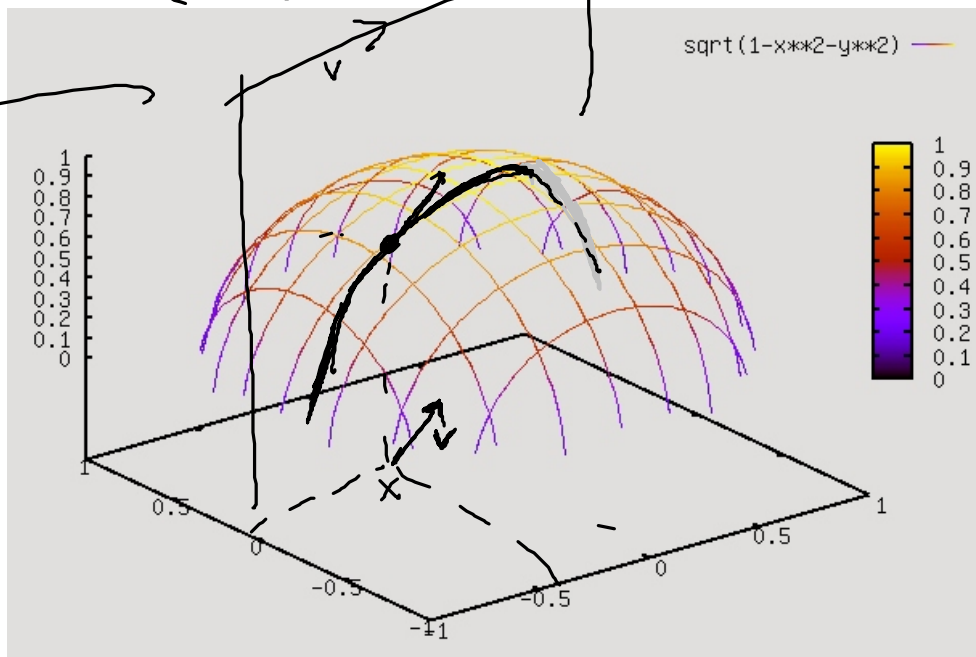


(d.h. $x, y \in D \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in D$ mit $\lambda \in [0, 1]$)

$f \in \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$, $x, x+v \in D$. Dann gilt

$$f(x+v) = f(x) + \partial_v f(x) + \frac{\partial_v^2 f(x)}{2!} + \dots + \frac{\partial_v^k f(x)}{k!} + R_{k+1}(x, v)$$

mit $R_{k+1} = \frac{\partial_v^{k+1} f(x + \bar{z}v)}{(k+1)!}$ mit $\bar{z} \in [0, 1]$



Definition

Für $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$, $k \geq 2$ (d.h. wenigstens zweimal stetig diffbar)

wirft

$$H_f(x) := (f_{x_i x_j}(x))$$

$$= \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & f_{x_1 x_2}(x) & \dots & f_{x_1 x_n}(x) \\ f_{x_2 x_1}(x) & f_{x_2 x_2}(x) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & f_{x_n x_2}(x) & \dots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

heißt Hesse-Matrix von f in x

$H_f(x)$ ist symmetrisch.

u.a. nützlich für Taylor-Formel, denn

$$\partial_v f(x) = (\text{grad } f(x))^T \cdot v \quad // \text{gestern}$$

$$\underline{\partial_v^2 f(x)} = \partial_v \left((\text{grad } f(x))^T \cdot v \right)$$

$$= \partial_v \left(\sum_i f_{x_i} \cdot v_i \right)$$

// Def. Skalarprod.

$$= \sum_i v_i \cdot \partial_v f_{x_i}(x)$$

// Abl. linear

$$= \sum_i v_i \left(\text{grad } f_{x_i}(x) \right)^T v$$

// 2. Abl.

$$= \sum_i v_i \sum_j f_{x_i x_j} \cdot v_j$$

// Def. Skalarprod.

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i f_{x_i x_j} v_j$$

$$= v^T H_f(x) v$$

Hessematrix ist „2. Ableitung“

Satz

a) $f(x) = f(x_0) + (\text{grad } f(\tilde{x}))^T (x - x_0)$
mit \tilde{x} auf der Strecke zwischen x und x_0
(Mittelwertsatz)

b) $f(x) = f(x_0) + (\text{grad } f(x_0))^T (x - x_0)$
 $+ \frac{1}{2} (x - x_0)^T H_f(\tilde{x}) (x - x_0)$
mit \tilde{x} auf der Strecke zwischen x und x_0
(s. Taylorformel)

c) „der Fehler ist von 2. Ordnung“

„das quadratische Taylorpolynom approximiert
ziemlich gut“

Beispiel

$$f(x, y) = x^2 y^3 + y \ln x$$

Bilde Taylor-Polynom 2. Ordnung an $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} 2xy^3 + y \cdot \frac{1}{x} \\ 3x^2 y^2 + \ln x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^3 - \frac{y}{x^2} & 2 \cdot 3xy^2 + \frac{1}{x} \\ 3 \cdot 2xy^2 + \frac{1}{x} & 3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Mit $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $\text{grad} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $H_f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$.

und damit:

$$f(x, y) \approx \begin{matrix} f(1,1) \\ 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \partial_v f(1,1) \\ 3(x-1) + 3(y-1) \end{matrix} \\ + \begin{matrix} \partial_v^2 f(1,1) \\ \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ + \frac{1}{2} (x-1)^2 + 7(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2$$

3. Lokale Minima und Maxima

Definition $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in D$ heißt lokale Maximalstelle bzw. lokale Minimalstelle von f ,

falls es eine Umgebung $U_r(a)$ von a gibt, so dass

$$\boxed{f(x) \leq f(a)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{f(x) \geq f(a)}$$

für alle $x \in U_r(a) \cap \bar{D}$.

Gelten die Ungleichungen sogar für alle $\bar{x} \in D$, dann heißt a globale Maximalstelle bzw. globale Minimalstelle.

Ein Extremum ist Maximum oder Minimum.

Satz

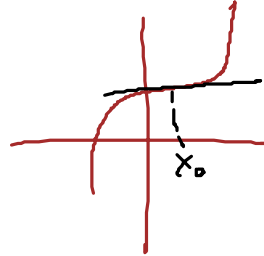
Ist $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ //stetig, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D \setminus \partial D$
//nicht am Rand

Dann gilt:

$$a \text{ lokale Extremstelle} \Rightarrow \text{grad } f(a) = 0$$

ich kann keine verbessernde Richtung mehr finden.

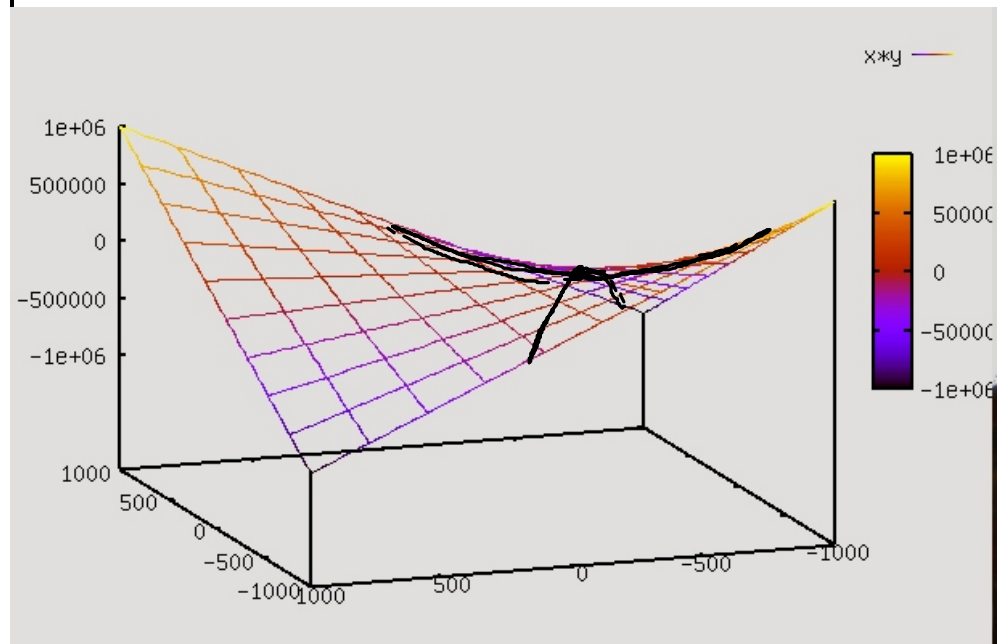
Wie in Mathe I: Umkehrung nicht unbedingt richtig



Definition

a heißt stationärer Punkt, falls $\text{grad } f(a) = 0$

Ist a stationärer Punkt, aber keine Extremstelle, dann heißt a Sattelpunkt



Satz (Extremstellentest)

Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ // zweimal stetig diff'bar

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $a \in D$ ein stationärer Punkt.

Dann gilt:

- a) $H_f(a)$ ist positiv definit $\Rightarrow a$ lokale Minimalstelle
 b) $H_f(a)$ ist negativ definit $\Rightarrow a$ lokale Maximalstelle
 c) $H_f(a)$ indefinit $\Rightarrow a$ ist Sattelpunkt.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

- positiv definit, falls $\boxed{x^T A x > 0}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- negativ definit, falls $\boxed{x^T A x < 0}$ — " —
- indefinit sonst.

Wie soll man das testen? \rightarrow 2 Möglichkeiten

a) über Eigenwerte

$H_f(a)$ pos. definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von $H_f(a)$ positiv

$H_f(a)$ neg. def. \Leftrightarrow alle EW negativ

$H_f(a)$ indefinit wenn EW mit gemischtem VZ

b) 2. Möglichkeit funktioniert nur für 2×2 Matrix

- $\det H_f(a) > 0$, $f_{xx}(a) > 0 \Rightarrow H_f(a)$ pos. definit
- $\det H_f(a) > 0$, $f_{xx}(a) < 0 \Rightarrow H_f(a)$ neg. definit
- $\det H_f(a) < 0 \Rightarrow H_f(a)$ indefinit.

Beispiele

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

Bestimme Extremstellen.

$f_x(x, y) = 2x$ $f_y(x, y) = 2y$

grad $f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

d.h. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist stationärer Punkt.

Zur Bestimmung des Typs, berechne Hessematrix

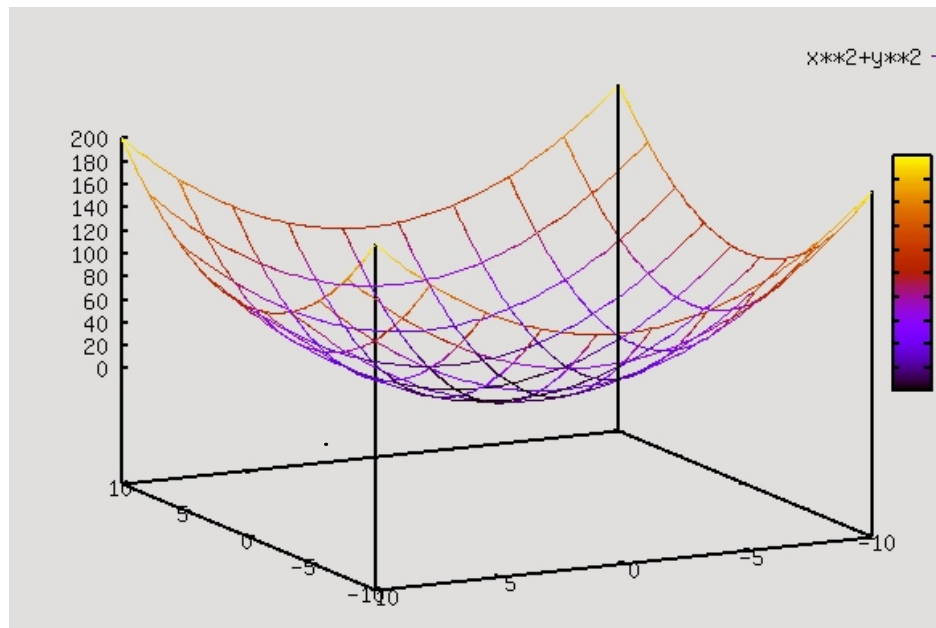
$$f_{xx}(x,y) = 2 \quad f_{yy}(x,y) = 2$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y)$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alle EW (ablesen) $\Rightarrow H_f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist lokale Minimalstelle

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist sogar globale Minimalstelle



Weiteres Beispiel

$$f(x,y) = y^2 + 2xy - 8x^2 + x^3 - 8x - 8y$$

Bestimme Extremalstellen

$$\text{Gradient: } \begin{cases} \text{I} & f_x = 2y - 16x + 3x^2 - 8 & \stackrel{!}{=} 0 \\ \text{II} & f_y = 2y + 2x - 8 & \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\text{II einsetzen in I}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$$

$$\Rightarrow y_1 = 4, y_2 = -2$$

⇒ stationäre Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\det H_f(x) = \begin{vmatrix} -16 + 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 36$$

$$\det H_f\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow H_f\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ist Sattelpunkt}$$

$$\left. \begin{aligned} \det H_f\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} &= 36 > 0 \\ f_{xx}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} &= 20 > 0 \end{aligned} \right\} H_f\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ pos. def.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ist lokale Minimalstelle}$$

f hat keine globale Extremalstelle (\Rightarrow Rand betrachten)

z.B. „in x -Richtung“

$$f(x, 0) = x^3 - 8x^2 - 8x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$$

die betrachtete Richtung ist willkürlich gewählt, am liebsten so, dass Grenzwerte „einfach“ werden.

