• VOLLVERSAMMLUNG FB 13
14.6. 17.30 L5|06-11
Wahlen, Neuigkeiten → hingehen
• es ist übrigens BILDUNGSSTREIK → schlaumachen
• und jetzt ist Vorlesung → mitmachen
• International day → 10.6. 9 OO Karo 5

---

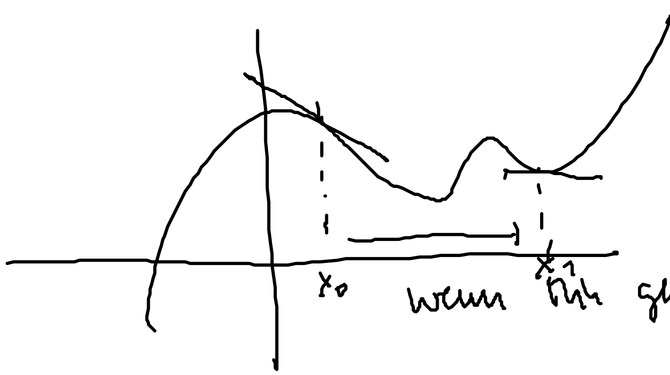
gestern: Richtungsableitung
→ gibt „Tangentensteigung" in Richtung v in einem Punkt x

$$\partial_v f(x) = (\text{grad } f(x))^T \cdot v$$

insb. zeigt Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs.

<u>Anwendung</u> Das Gradientenverfahren zur Bestimmung eines Maximums (bzw. Minimums) einer Funktion

Prinzip in $\mathbb{R}^1$



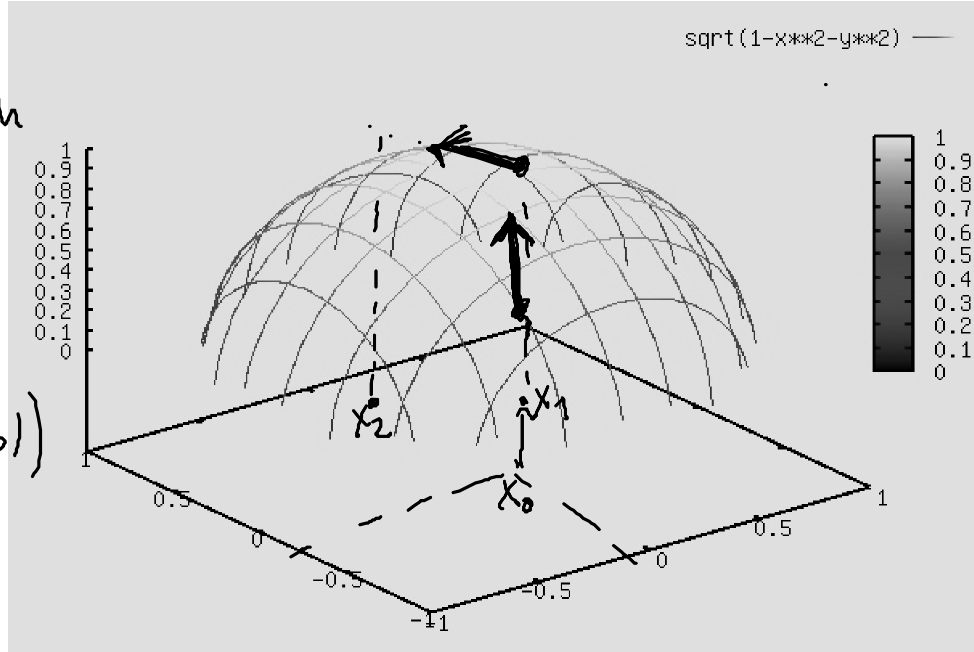

wenn Min gesucht „gehe nach rechts"

<u>Startwert $x_0$</u>
setze $x_1 = x_0 + h \cdot \text{grad } f(x_0)$

mit einer zu
wählenden Schrittweite h

Ist $f(x_1) > f(x_0)$
fahre fort mit $x_1$
wie oben

ansonsten $\left( f(x_1) < f(x_0) \right)$
wähle h kleiner
(z.B. $\frac{h}{2}$) und
versuche es erneut




. . .

<u>Abbruch</u>, wenn grad $f(x)$ nahe am Nullvektor.
Beachte: So kann man nur lokale Extrema finden.
Analog: Minimum finden, indem in Richtung $-\text{grad} f(x)$ gegangen wird.

## 2. Approximation höherer Ordnung

Zur Erinnerung: Für $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ gilt
Taylor-Formel:

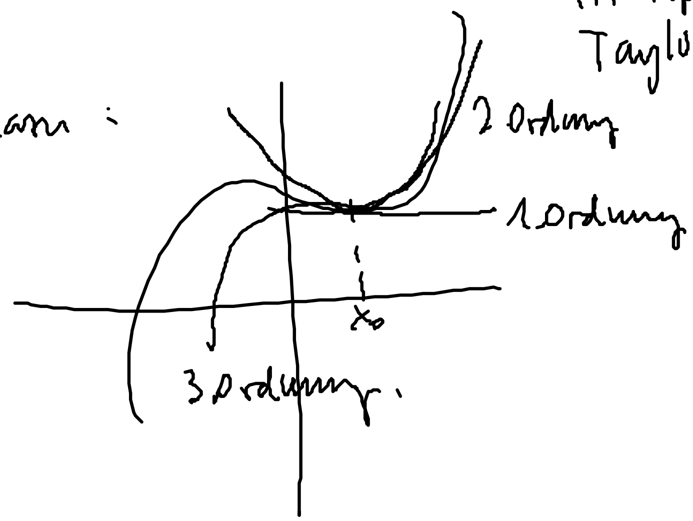
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)}_{\text{Tangente}} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x, x_0)$$

mit Restglied $R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

mit $\xi \in [x, x_0]$.

wenn das klein genug, dann ist Approximation von f durch Taylor „gut genug“.

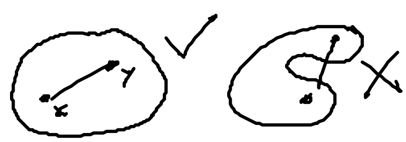
Bild dann:




Für Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sieht die Taylor-Formel so aus:

**Satz (Taylor-Formel)**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex



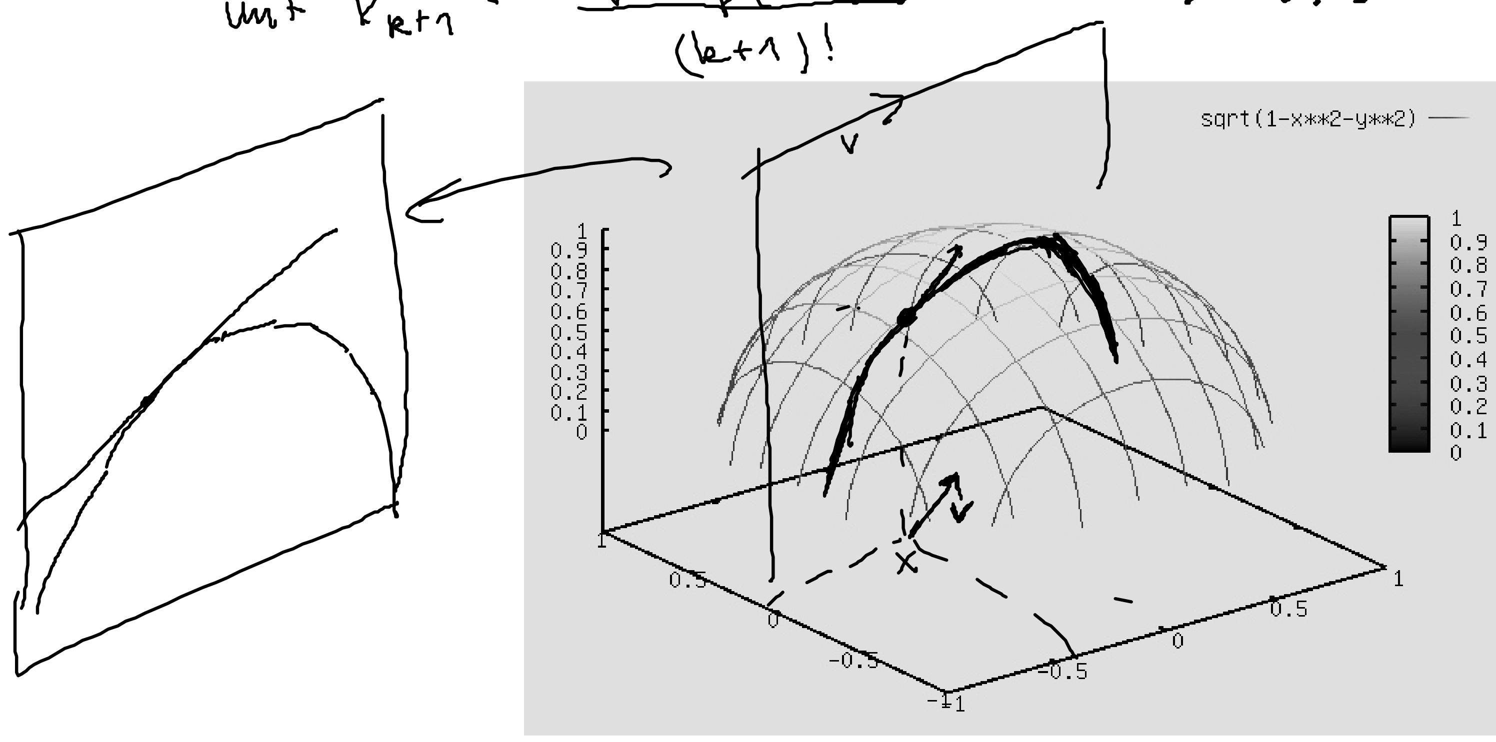

,

(d.h. $x, y \in D \Rightarrow \lambda x + (1+\lambda) y \in D$ mit $\lambda \in [0,1]$)

$f \in \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$, $x, x+v \in D$. Dann gilt

$$\boxed{f(x+v) = f(x) + \partial_v f(x) + \frac{\partial_v^2 f(x)}{2!} + \dots + \frac{\partial_v^k f(x)}{k!} + R_{k+1}(x,v)}$$

mit $R_{k+1} = \dfrac{\partial_v^{k+1} f(x + \xi v)}{(k+1)!}$ mit $\xi \in [0,1]$



Definition
Für $f \in C^k(D,\mathbb{R})$, $k \geq 2$ (d.h. wenigstens zweimal stetig diffbar)

heißt
$$H_f(x) := \left(f_{x_i x_j}(x)\right)$$
$$= \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & f_{x_2x_2}(x) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & f_{x_nx_2}(x) & \cdots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

heißt Hesse-Matrix von $f$ in $x$

$H_f(x)$ ist symmetrisch.
U.a. nützlich für Taylor-Formel, denn
$$\partial_v f(x) = (\operatorname{grad} f(x))^T \cdot v \quad \text{// gestern}$$
$$\underline{\partial_v^2 f(x)} = \partial_v \left( (\operatorname{grad} f(x))^T \cdot v \right)$$
$$= \partial_v \left( \sum_i f_{x_i} \cdot v_i \right) \quad \text{// Def. Skalarprod.}$$
$$= \sum_i v_i \cdot \partial_v f_{x_i}(x) \quad \text{// Abl. linear}$$
$$= \sum_i v_i \left(\operatorname{grad} f_{x_i}(x)\right)^T v \quad \text{// 2. Abl.}$$
$$= \sum_i v_i \sum_j f_{x_i x_j} \cdot v_j \quad \text{// Def. Skalarprod.}$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i f_{x_i x_j} v_j$$

$$= \underline{v^T H_f(x)\, v}$$

$\boxed{\text{Hessematrix ist „2. Ableitung"}}$

<u>Satz</u>

a) $f(x) = f(x_0) + \left(\operatorname{grad} f(\tilde{x})\right)^T (x - x_0)$
mit $\tilde{x}$ auf der Strecke zwischen $x$ und $x_0$
(Mittelwertsatz)

b) $f(x) = f(x_0) + \left(\operatorname{grad} f(x_0)\right)^T (x - x_0)$
$+ \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\tilde{x})(x - x_0)$

mit $\tilde{x}$ auf der Strecke zwischen $x$ und $x_0$
(s. Taylorformel)

c) „der Fehler ist von 2. Ordnung"

„das quadratische Taylorpolynom approximiert ziemlich gut"

<u>Beispiel</u>

$f(x,y) = x^2 y^3 + y \ln x$

Bilde Taylor-Polynom 2. Ordnung an $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} 2xy^3 + y \cdot \frac{1}{x} \\ 3x^2y^2 + \ln x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^3 - \frac{y}{x^2} & 2 \cdot 3xy^2 + \frac{1}{x} \\ 3 \cdot 2xy^2 + \frac{1}{x} & 3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Mit $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ gilt $\operatorname{grad}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ und $H_f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 7\\7 & 6\end{pmatrix}$.

und damit:

$$f(x,y) \approx \underbrace{1}_{f(1,1)} + \underbrace{3\underbrace{(x-1)}_{x_0=\binom{1}{1}} + 3\underbrace{(y-1)}_{x_0=\binom{1}{1}}}_{\partial_v f(1,1)}$$

$$+\ \partial_v^2 f(1,1) = \begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}1 & 7\\7 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$$

$$+\ \frac{1}{2}(x-1)^2 + 7(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2$$

## 3. Lokale Minima und Maxima

**Definition** $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in D$ heißt <u>lokale Maximalstelle</u> bzw. <u>lokale Minimalstelle</u> von $f$,

falls es eine Umgebung $U_r(a)$ von $a$ gibt, so dass

$$\boxed{f(x) \leq f(a)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{f(x) \geq f(a)}$$

für alle $x \in U_r(a) \cap \bar{I}$.

Gelten die Ungleichungen sogar für alle $\bar{x} \in D$, dann heißt $a$ <u>globale Maximalstelle</u> bzw. <u>globale Minimalstelle</u>.

Ein <u>Extremum</u> ist Maximum oder Minimum.

**Satz**

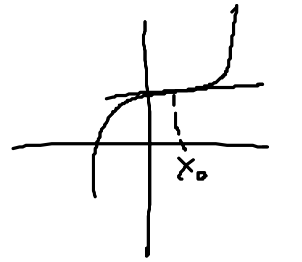
Ist $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ //stetig, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in D \setminus \partial D$
//nicht am Rand

Dann gilt:

$$\boxed{a \text{ lokale Extremstelle} \Rightarrow \operatorname{grad} f(a) = 0}$$

ich kann keine verbessernde Richtung mehr finden.

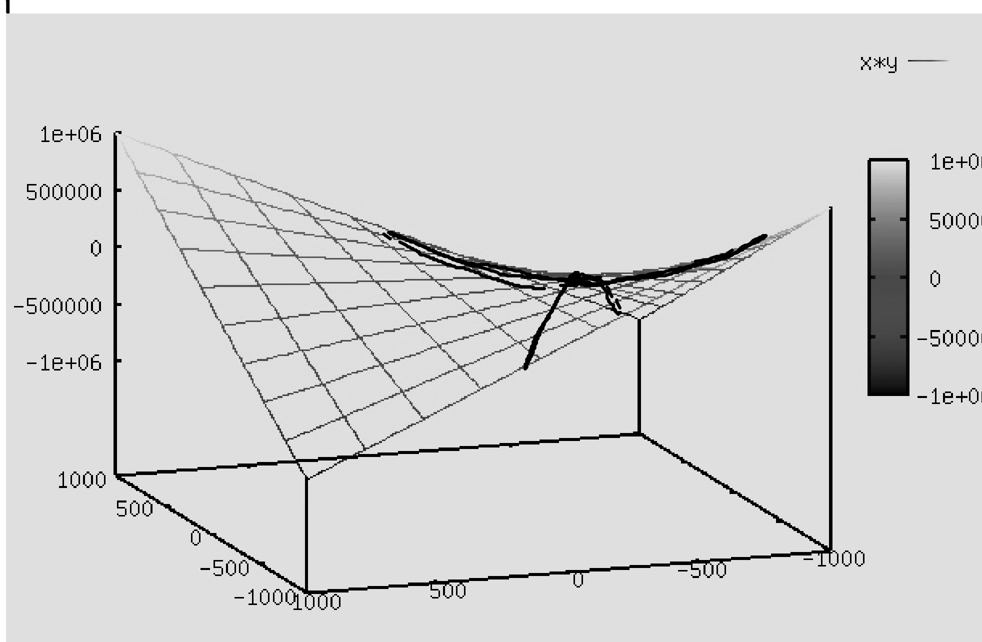
Wie in Mathe I: Umkehrung nicht unbedingt richtig




Definition

a heißt <u>stationärer Punkt</u>, falls $\operatorname{grad} f(a) = 0$

Ist a stationärer Punkt, aber keine Extremalstelle, dann heißt a <u>Sattelpunkt</u>




<u>Satz (Extremstellentest)</u>

Sei $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ //zweimal stetig diff'bar

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $a \in D$ ein <u>stationärer Punkt</u>.

Dann gilt:

a) $H_f(a)$ ist positiv definit $\Rightarrow$ a lokale Minimalstelle
b) $H_f(a)$ ist negativ definit $\Rightarrow$ a lokale Maximalstelle
c) $H_f(a)$ indefinit $\Rightarrow$ a ist Sattelpunkt.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt
- positiv definit, falls $\boxed{x^T A x > 0}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- negativ definit, falls $\boxed{x^T A x < 0}$ —"—
- indefinit sonst.

Wie soll man das testen? $\to$ 2 Möglichkeiten

a) über Eigenwerte

$H_f(a)$ pos. definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $H_f(a)$ positiv

$H_f(a)$ neg. def. $\Leftrightarrow$ alle EW negativ

$H_f(a)$ indefinit wenn EW mit gemischtem VZ

b) 2. Möglichkeit funktioniert nur für 2×2 Matrix

- $\det H_f(a) > 0$, $f_{xx}(a) > 0$ $\Rightarrow$ $H_f(a)$ pos. definit
- $\det H_f(a) > 0$, $f_{xx}(a) < 0$ $\Rightarrow$ $H_f(a)$ neg. definit
- $\det H_f(a) < 0$ $\Rightarrow$ $H_f(a)$ indefinit.

<u>Beispiele</u>

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ Bestimme Extremstellen.

$f_x(x,y) = 2x \qquad f_y(x,y) = 2y$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

d.h. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist stationärer Punkt.

Zur Bestimmung des Typs, berechne Hessematrix

$f_{xx}(x,y) = 2 \qquad f_{yy}(x,y) = 2$

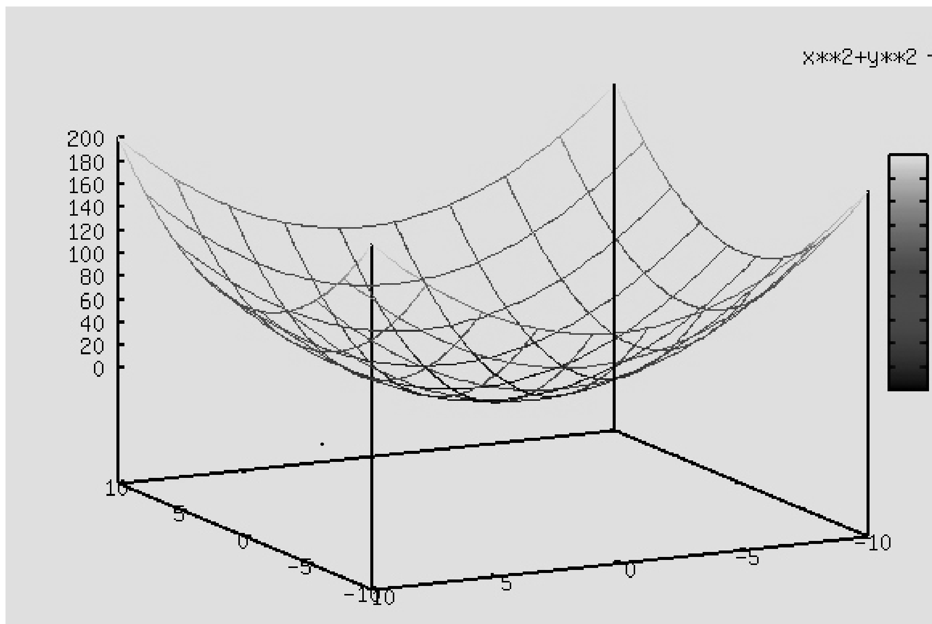
$f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y)$

$\Rightarrow \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

alle EW (ablesen) $\Rightarrow$ $H_f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist lokale Minimalstelle

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist sogar globale Minimalstelle




<u>weiteres Beispiel</u>

$f(x,y) = y^2 + 2xy - 8x^2 + x^3 - 8x - 8y$

Bestimme Extremalstellen

Gradient: $\mathrm{I} \quad f_x = 2y - 16x + 3x^2 - 8 \overset{!}{=} 0$

$\mathrm{II} \quad f_y = 2y + 2x - 8 \overset{!}{=} 0$ II einsetzen in I

$\Rightarrow 3x^2 - 18x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \; x_2 = 6$

$\Rightarrow \quad y_1 = 4, \; y_2 = -2$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

$$\det H_f(x) = \begin{vmatrix} -16+6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 36$$

$$\det H_f\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow H_f\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \text{ ist Sattelpunkt}$$

$$\left.\begin{aligned} \det H_f\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} &= 36 > 0 \\ f_{xx}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} &= 20 > 0 \end{aligned}\right\} H_f\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} \text{ pos. def.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} \text{ ist lokale Minimalstelle}$$

$f$ hat keine globale Extremalstelle ($\Rightarrow$ Rand betrachten)

z.B. „in $x$-Richtung"

$$f(x,0) = x^3 - 8x^2 - 8x$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$$

die betrachtete Richtung ist willkürlich gewählt, am liebsten so, dass Grenzwerte „einfach" werden.