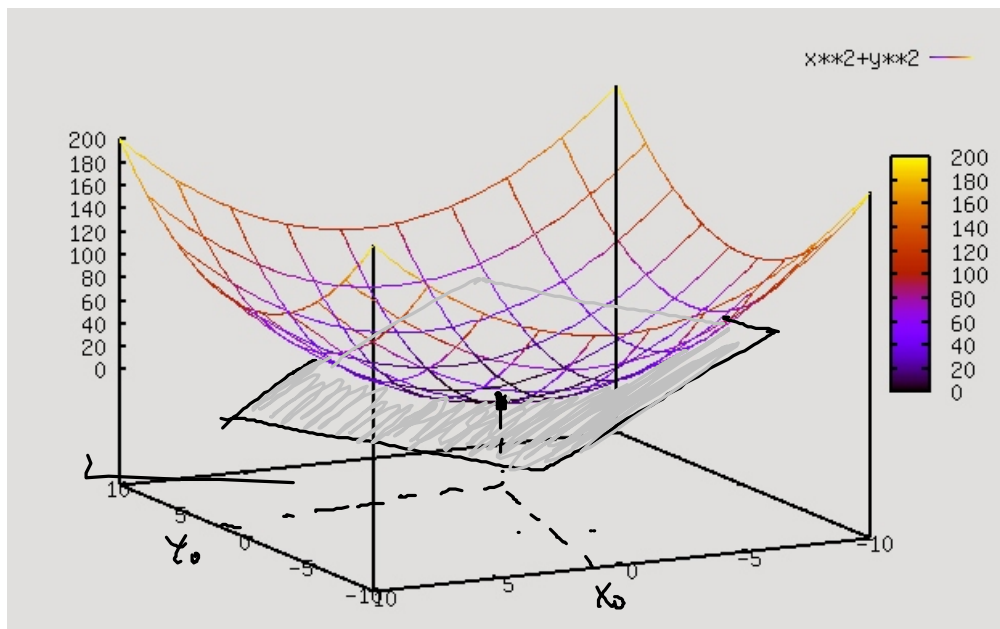
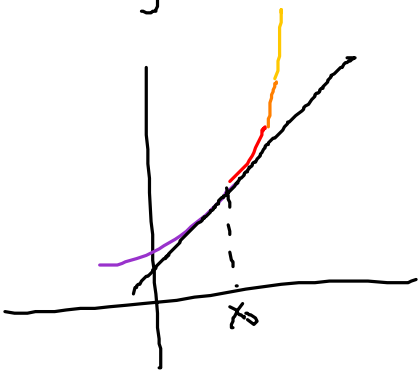


Anwendungen des totalen Differentials (= lineare Approximation)

letzte VL:

$$f(x) \approx f(x_0) + (\text{grad } f)(x_0)^T (x - x_0)$$

analog für $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$

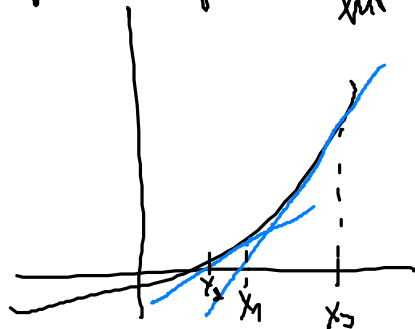


Tangentialebene

z.B. gut für Näherungsrechnung.

z.B. Newtonverfahren

für $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$



in höherdimensionalen, d.h. z.B. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Löse $f(x, y) = 0$
 $g(x, y) = 0$

nicht-lineares Gleichungssystem

nutze obiges aus:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

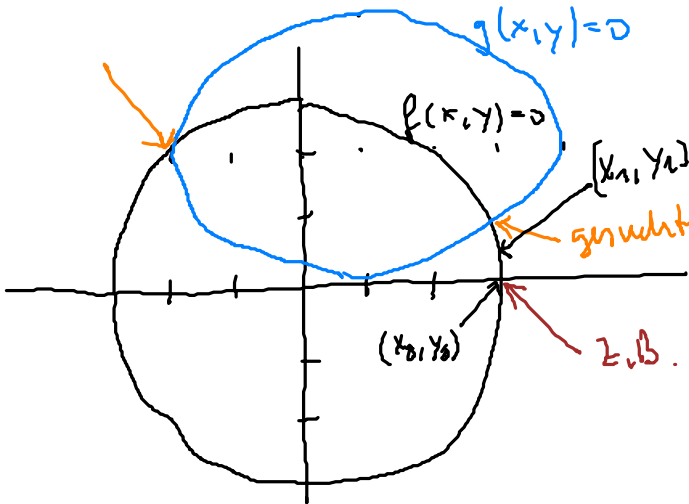
Beispiel zum Newtonverfahren

Kreis: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$

Ellipse: $g(x, y) = \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} - 1 = 0$

gesucht $f(x, y) = g(x, y)$, also Schnittpunkte, also gleichzeitige Nullstellen beider Gleichungen, also Lösung des Gleich. systems

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$



z.B. Startpunkt $(x_0, y_0) = (3, 0)$
 // willkürlich "in der Nähe" gewählt.

Berechnet: partielle Ableitungen

$$f_x(x, y) = 2x \quad f_y(x, y) = 2y$$

$$g_x(x, y) = \frac{2}{9}(x-1) \quad g_y(x, y) = \frac{2}{4}(y-2)$$

1. Iteration: $(x_0, y_0) = (3, 0)$

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) &= 0 \\ 0 + 6 \cdot (x-3) + 0 \cdot (y-0) &= 0 \quad \Rightarrow x_1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x-x_0) + g_y(x_0, y_0)(y-y_0) &= 0 \\ \frac{4}{9} + \frac{4}{9}(x-3) + \left(-\frac{4}{4}\right) \cdot (y-0) &= 0 \quad \Rightarrow y_1 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

(nach Lösen dieses LGS)

2-Iteration

$$(x_1, y_1) = \left(3, \frac{4}{9}\right)$$

$$f(x_1, y_1) + f_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (y - y_1) = 0$$
$$\frac{16}{27} + 6(x-3) + \frac{8}{9} \left(y - \frac{4}{9}\right) = 0$$

ebenso für g:

$$\left(\frac{4}{9} + \frac{49}{81} - 1\right) + \frac{4}{9}(x-3) - \frac{7}{9}\left(y - \frac{4}{9}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_2 = 2,96011... \\ y_2 = 0,4856 \end{array} \right\}$$

usw.

Abbruch, falls „Approximation“

$$f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$g + g_x(x-x_0) + g_y(y-y_0)$$

$$\text{oder } \begin{cases} f \\ g \end{cases}$$

} „nahe genug“
↑
Genauigkeit gibt man sich vor.

→ das kann man eben Computer machen lassen.

Beachte: Konvergenz hängt ab vom Startpunkt.

Richtungsableitung, Anstieg, Kettenregel

Definition

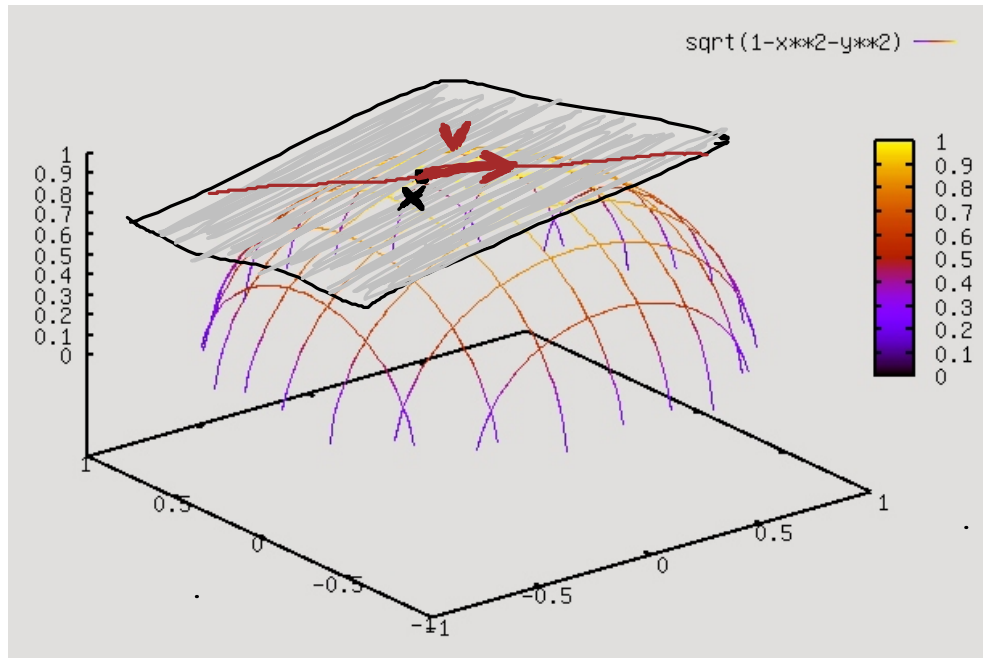
Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ („Richtung“). Dann heißt der Grenzwert (falls er existiert)

$$\partial_v f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t}$$

die Ableitung von f in Richtung v an der Stelle x ,

Falls $|v|=1$, d.h. wenn v Einheitsvektor, dann heißt $D_v f(x)$

Richtungsableitung
(Ausstieg)



speziell: Richtungsableitungen in Richtung der Achsen;
d.h. $v = e_i$ (Einheitsvektoren)

$$D_v f(x) = f_{x_i}(x) \quad \text{und gerade die partiellen Ableitungen}$$

„Ausstieg“ nicht zufällig gewählt: Steigung der Tangente an f im Punkt x in Richtung v

Gesamtheit aller Tangenten gibt Tangentialebene.

Bedeutung: $D_v f(x) > 0 \rightarrow f(x)$ nimmt in Richtung v zu
 $D_v f(x) < 0 \rightarrow f(x)$ —4— ab.

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar,
 $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$D_v f(x) = (\text{grad } f(x))^T \cdot v = \sum_{i=1}^n f_{x_i} \cdot v_i$$

↑ Skalarprodukt

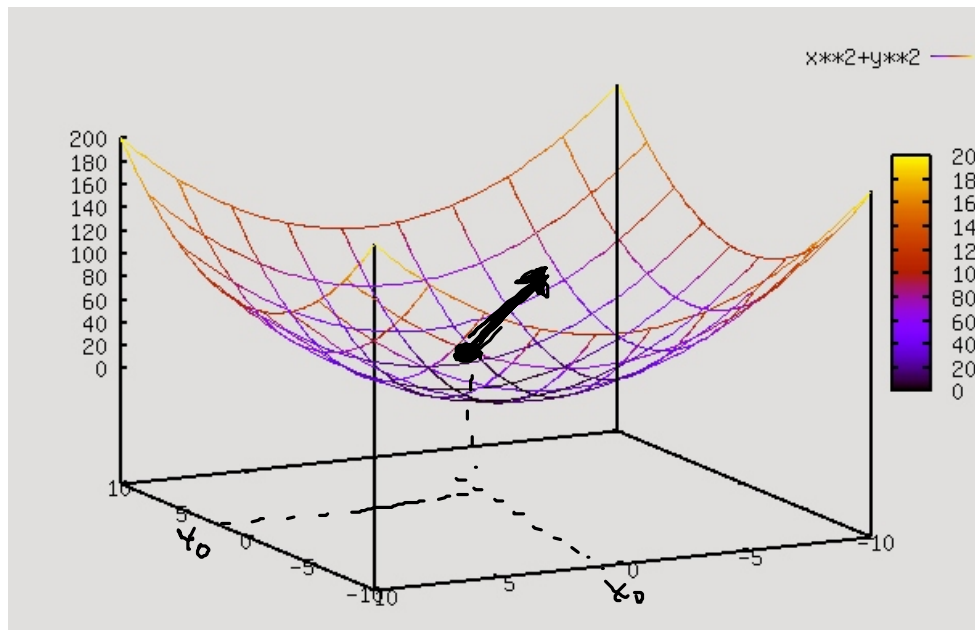
Beispiele

$$1. f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$V = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$

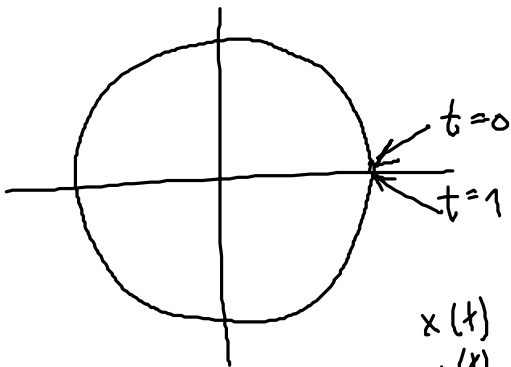
$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$



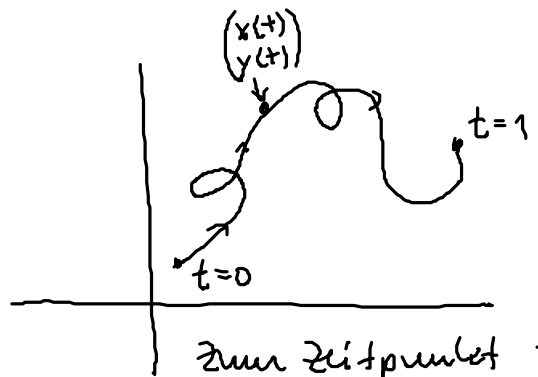
$$\rightarrow \partial_V f(x) = (\text{grad } f(1, 1))^T \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = (2, 2) \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = 2(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Erinnerung an Kurven

z.B.



$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 2\pi t \\ y(t) &= \sin 2\pi t \end{aligned}$$



Zum Zeitpunkt $t=0$
am Startpunkt,
zum Zeitpunkt $t=1$
am Zielpunkt,
zwischendurch beschreibt
 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ Punkt auf Kurve
zum Zeitpunkt t .
„Parametrisierung“

Satz (Wegkürregel)

Sei $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und Kurve $x: \mathbb{R} \supseteq [a, b] \rightarrow D$
(stetig diff'bar), $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Dann gilt:

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t)) = (\text{grad } f(x(t)))^T \cdot \dot{x}(t)$$

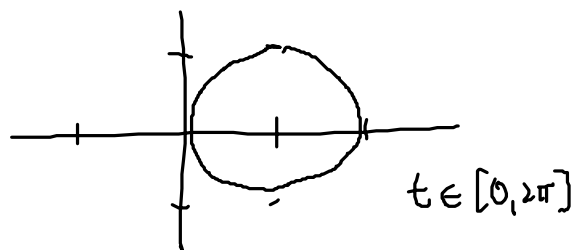
äußere Ableitung mal
innere Ableitung

↑ Ableitung von
 $x(t)$ nach t
" $x'(t)$ "

Beispiel

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



$$g(t) = f(x(t), y(t)) = (1 + \cos t)^2 + (\sin t)^2$$

Funktionswert zum
Zeitpunkt t

$$g'(t) = (\text{grad } f(x(t), y(t)))^T \cdot \dot{x}(t)$$

Kurve nach t abgeleitet

↑ Ableitung der Kurve nach t

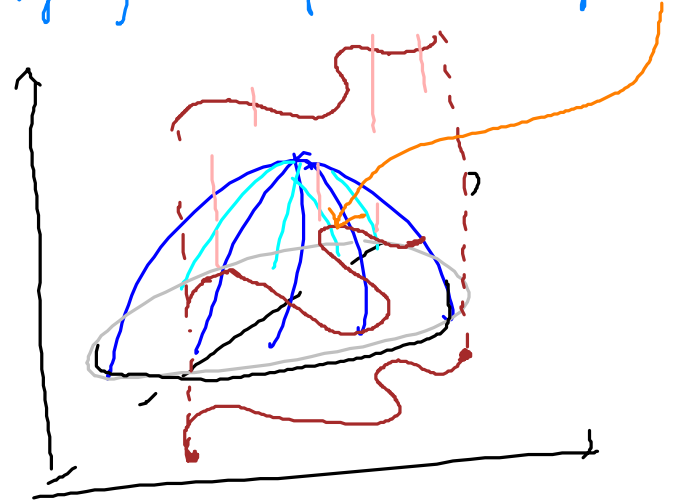
$$= \begin{pmatrix} 2(1 + \cos t) \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

↑
 $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

↑ Gradient von f ,
partielle Ableitungen
nach $x(t)$ und $y(t)$

$$= 2(1 + \cos t)(-\sin t) + 2 \sin t \cos t = -2 \sin t.$$

// das ist Steigung von f zum Zeitpunkt t



§2 Anwendungen der Differentiation

1. Richtung des stärksten Abstiegs

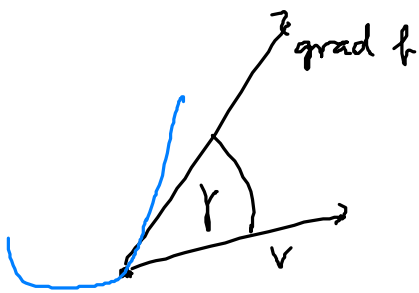
Für $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, D offen, der Anstieg von f im Punkt $x \in D$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, $|v|=1$ ist gegeben durch (s.o.)

$$D_v f(x) = (\text{grad } f(x))^T \cdot v$$

$$= |\text{grad } f(x)| \cdot |v| \cos \gamma$$

wobei γ eingeschlossener Winkel zwischen grad und v

$$= |\text{grad } f(x)| \cdot \cos \gamma$$



In welcher Richtung ist der größte Anstieg? (oder Abstieg)

Passiert für $\cos \gamma = 1$, d.h. für $\gamma = 0$, d.h. in Richtung des Gradienten

⇒ Richtung von $\text{grad } f(x) =$
Richtung des maximalen Anstiegs von f in x

Entsprechend : $- \text{grad } f(x)$ zeigt in Richtung des größten Abfalls,